Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes»... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.
Priorité est naturellement donnée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N°204 (Miguel AMENGUAL COVAS, Cala Figuera, Majorque - Espagne).

On se donne dans $\mathbf{R}^3$ un paraboloïde elliptique. Trouver le lieu des centres des sphères qui coupent le paraboloïde selon deux cercles.

ÉNONCÉ N°205 (Roger CUCULIÈRE, Rabat - Maroc).

Déterminer les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant pour tout x et tout y réels :

$$f\left(\sqrt{x^2+xy+y^2}\right)=f(x).f(y)\ .$$

ÉNONCÉ N°206 (François LO JACOMO, Paris).

Soit a un entier >0, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n > 0$, $u_{n+1} = au_n + u_{n-1}$. Montrer que quel que soit n, si l'on appelle m la partie entière de $\frac{4}{3}(n+2)$, montrer que le produit : $u_1 u_2 \dots u_m$ est divisible par n !

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 190 (Claudine FAGE, Limoges).

Un professeur donne 2 entiers à ses élèves de 4ème et leur dit : «Ce sont les longueurs de 2 côtés d'un triangle rectangle. Trouver la longueur du troisième côté, sachant qu'elle est entière». Ce problème peut-il admettre deux réponses ?

SOLUTION de Pierre SAMUEL (Hossegor).

Le problème revient à chercher s'il existe des entiers a et b positifs, $a > b$, tels que $a^2 + b^2$ et $a^2 - b^2$ soient des carrés. Fermat, je crois, a montré que c'est impossible par sa méthode de «descente infinie». Voici une démonstration qui part de zéro (et qui est proche de ma «*Théorie algébrique des nombres*»). Quitte à diviser a et b par leur PGCD, on peut supposer a et b premiers entre eux ; notation $(a , b) = 1$.

Deux préliminaires :

① Si $(x , y) = 1$ et si xy est un carré, x et y sont des carrés. En effet, tout facteur premier p de xy figure, soit dans x soit dans y, avec la totalité de son exposant, nécessairement pair.

② Dans l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = z^2$, avec x, y, z premiers entre eux deux à deux, deux des entiers x, y, z sont impairs et le troisième est pair. Or x et y ne peuvent être tous les deux impairs, sinon x^2 et y^2 sont congrus à 1 modulo 4 et z^2 est congru à 2 ; c'est impossible car les carrés modulo 4 sont 0 et 1. Donc, par exemple, y est pair, ainsi que $z + x$ et $z - x$, soit $y = 2y'$, $z + x = 2u'$ et $z - x = 2v'$. Comme $z = u' + v'$, $x = u' - v'$ et $(z , x) = 1$, on a $(u' , v') = 1$. Or la relation $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$ donne $y'^2 = u'v'$.

Par ①, u' et v' sont donc des carrés u^2 et v^2. L'équation diophantienne est donc résolue par les formules :
$x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$ avec, bien sûr $(u, v) = 1$.
Cela étant, si $a^2 + b^2$ et $a^2 - b^2$ sont des carrés, on a

$$(a) \qquad a^4 - b^4 = c^2.$$

Les considérations de parité de ② montrent que a est impair (car $a^2 = b^2$ + carré), donc que b est pair (car $a^2 + b^2$ = carré) ; ainsi, c est impair. On va montrer que *(a)* n'a pas de solutions en entiers a, b, c tous >0. Comme cette relation s'écrit $(a^2)^2 = (b^2)^2 + c^2$,. ② montre qu'on a des entiers s et t tels que

$$a^2 = s^2 + t^2 \quad , \quad b^2 = 2st \quad , \quad c = s^2 - t^2 \text{ et } (s, t) = 1.$$

Comme b est pair, $b = 2b'$, on a $st = 2b'^2$ de sorte que, par exemple, s est pair, $s = 2s'$. Alors $s't = b'^2$, $(s, t) = 1$ d'où, par ①, $s' = u^2$ et $t = v^2$. Ainsi $a^2 = 4u^4 + v^4 = (2u^2)^2 = (v^2)^2$, avec $(u, v) = 1$.

Par ② encore, on a des entiers x, y tels que $a = x^2 + y^2$, $2u^2 = 2xy$, $v^2 = x^2 - y^2$ et $(x, y) = 1$. Comme $xy = u^2$, x et y sont des carrés a_1^2 et b_1^2 par ①, d'où $v^2 = a_1^4 - b_1^4$, une relation de la même forme que *(a)*.

Mais, comme $a = x^2 + y^2 = a_1^4 + b_1^4$, on a $a > a_1$. Par répétitions du procédé, on obtient une suite strictement décroissante $(a, a_1, \dots a_n, \dots)$ d'entiers > 0, ce qui est impossible.

Remarque :

Dominique ROUX signale qu'il s'agit d'un problème réel posé à la suite d'une activité traitée en classe, les deux entiers donnés étant 1984 et 1985. Il mentionne d'autres références : une preuve de Destournelles (Rodez, 1874), ainsi que :

Cuculière, *Pour la Science*, Juillet 1987.
Itard, Que Sais-je n°1093, *Arithmétique et théorie des nombres*, p.108-110.
Koblitz, *Introduction to eliptic curves and modular forms*, Springer 97.
Sierpinski, *Elementary theory of numbers*, p.50-52.
(Cette dernière est également citée par Miguel AMENGUAL COVAS).

Autres solutions :

Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Roland CHIAVASA (Lambesc), Philippe DELEHAM (Reims), René MANZONI (Le Havre), Charles

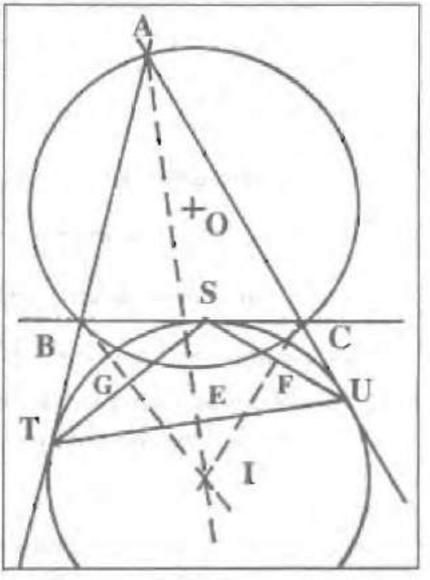
NOTARI (Noé), Pierre RENFER (Ostwald), une solution incomplète et une solution fausse.

ÉNONCÉ N°191 (André ANGLÈS, Limoges).

Chaque cercle tangent aux trois côtés d'un triangle donné détermine un triangle : celui dont les sommets sont les points de contact. Les droites d'Euler de ces quatre triangles sont-elles concourantes ?

SOLUTION de R.RAYNAUD (Digne).

Soit un triangle (A,B,C), son cercle circonscrit (O) de centre O et l'un des ses cercles inscrits ou exisnrits (I) de centre I et de rayon r, tangent en S, T, U aux côtés du triangle. Soit E, F, G les milieux des côtés du triangle (S,T,U).
(TU) est la polaire de A par rapport à (I) ; donc $\overline{IA} \cdot \overline{IE} = r^2$.
L'inversion de centre I et de puissance r^2 transforme le cercle (O) en le cercle d'Euler (EFC) du triangle (S,T,U), cercle dont le centre ω est donc aligné avec I et O.
La droite d'Euler $(I\omega)$ du triangle (S,T,U) passe par O.
La réponse à la question du problème est donc OUI.



NB. Les trois cercles (I), (O), (ω) appartiennent tous au même faisceau.

Autres solutions :
G.BOUCHER (Paris), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Michel HEBRAUD (Toulouse), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé), Pierre RENFER (Ostwald), Eric SIGWARD (Sarreguemines).

ÉNONCÉ N°192 (Dominique ROUX, Limoges).

Caractériser les triangles ABC tels que pour tout point M de l'espace, il existe un triangle dont les longueurs des côtés sont MA, MB, MC.

SOLUTION de Jacques BASTIER (Bordeaux).

Condition nécessaire :

Si 2 côtés du triangle ABC sont inégaux, par exemple AB et AC et que M soit leur sommet commun, ici, A, il n'y a aucun triangle dont les côtés aient pour mesure AB, AC et AA. Il est donc nécessaire que ABC soit équilatéral. Notons que dans ce cas, toujours avec M en A, le triangle en question a 2 sommets confondus. L'énoncé présuppose donc que 3 points, même alignés ou confondus sont les sommets d'un triangle.

Condition suffisante :

Par hypothèse, ABC désigne un triangle équilatéral.

Montrons qu'en choisissant bien le centre ou l'axe de la rotation r, telle que $r(B) = C$, le triangle MNC a des côtés de longueurs MA, MB et MC si $N = r(M)$.

1) Si M est dans le plan (ABC), on prend A pour centre de r. Le triangle AMN est alors équilatéral car $\widehat{BAC} = \widehat{MAN}$, donc $MA = MN$, de plus $MB = NC$ et MC est le troisième côté du triangle MNC cherché.

2) Si M n'est pas dans le plan (ABC) appelons P un des 2 points de (AM) tel que $AP = BC$ et I le centre du cercle passant par B, C et P en observant que dans ce cas, B, C, P ne peuvent pas être alignés, ni I confondu avec A. On prend alors (AI) pour axe de r et la solution ne diffère de la précédente que dans la preuve que AMN est équilatéral. Pour cette preuve, on utilise $r(P)$ nommé Q, et la restriction de r au plan contenant B, C, P et Q. Donc ces derniers points sont équidistants de I, de plus I, Q, N sont alignés comme I, P, M. Or $\widehat{BIC} = \widehat{PIQ}$ (angle de r sans l'orientation inutile ici) d'où $PQ = BC = AP$, puis APQ équilatéral et par suite AMN également.

Remarque :

1) Le triangle est dégénéré (trois points alignés) si et seulement si M appartient au cercle circonscrit à ABC. Par la démonstration ci-dessus, il suffit d'étudier l'angle $\widehat{CMN}$ pour s'en convaincre. Sinon, on peut supposer que ce cercle circonscrit est le cercle trigonométrique d'un plan complexe. MA, MB et MC ont alors pour longueurs $2|\sin\theta|$, $2|\sin(\theta + \pi/3)|$ et $2|\sin(\theta+2\pi/3)|$ et comme $e^{i\theta}(1 + j + j^2) = 0$, l'une des trois longueurs est somme des deux autres.

2) Jacques BASTIER généralise le résultat à un espace de dimension quelconque, en faisant intervenir l'ellipse de foyers B et C passant par M, et pro-

pose plusieurs compléments, dont celui-ci :

ABC étant un triangle équilatéral, toute ellipse de foyers *B* et *C* est bitangente intérieurement au cercle *(A)* de centre *A* et de rayon égal à son diamètre focal. Les points de contact sont réels lorsque son excentricité est supérieure à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans le cas contraire, l'ellipse est strictement intérieure à ce cercle.

La première de ces propriétés s'applique aussi aux hyperboles de foyers *B* et *C*. Les points de contacts réels de ces coniques avec le cercle *(A)* associé décrivent le cercle circonscrit au triangle *ABC* (sauf les sommets).

Autres solutions :
Edgard DELPLANCHE (Créteil), Michel HEBRAUD (Toulouse), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé), R.RAYNAUD (Digne), Pierre RENFER (Ostwald).

COURRIER DE LECTEURS

A propos de l'énoncé 186, Georges GLAESER (Strasbourg) se rappelle avoir recherché, avec ses élèves de Math.Elem., en 1948, des carrés parfaits s'écrivant avec dix chiffres tous différents. «Ce n'est pas des maths» avait déclaré l'un des élèves, ce qui permit au professeur de faire l'éloge de l'observation des faits scientifiques et du tâtonnement intelligent.

Aujourd'hui, l'ordinateur nous fournit rapidement 87 solutions de ce problème, allant du carré de 32 043 au carré de 99 066 (et 30 de plus si l'on tolère que le premier chiffre soit un zéro : du carré de 11 826 au carré de 30 384). Compte tenu du fait qu'un tel carré est obligatoirement multiple de 9, le nombre de solutions était relativement prévisible, car un multiple de 9 inférieur à 10^{10} (ou à 10^9) a environ une chance sur 300 d'avoir ses dix chiffres distincts (ou ses neuf chiffres distincts non nuls). Or il existe 22 793 carré parfaits multiples de 9 entre 10^9 et 10^{10}, et 7 207 carrés parfaits multiples de 9 entre 10^8 et 10^9.

On pourrait même espérer qu'il existe des cubes parfaits s'écrivant avec dix chiffres tous distincts, dans la mesure où 385 cubes parfaits sont multiples de 9 compris entre 10^9 et 10^{10}, et 179 cubes parfaits sont multiples de 9 entre 10^8 et 10^9. Mais l'ordinateur ne nous livre aucune solution (même en tolérant que le premier chiffre soit un zéro).