Examens et concours

AGREGATION INTERNE

Pour les collègues qui prépareront courageusement le concours pendant les vacances aussi bien que pour les «mordus» de «grands» problèmes, voici les sujet d'Agrégation Interne 1991.

Nous pensons également aux collègues qui souhaitent préparer le CAPES interne, mais la place nous manque pour publier les sujets de la session 1991.

Signalons toutefois qu'on peut se procurer le ***Rapport complet*** *du Concours, avec sujets et commentaires, dans les C.R.D.P. de province et à la librairie du C.N.D.P. de Paris 13, rue du Four - 75 006 PARIS.*

Les brochures en question (session 91) sont en vente sous le numéro : 001 R 5288.

Qu'on se le dise !

J. 2219

SESSION DE 1991

concours interne de recrutement de professeurs agrégés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

première épreuve de mathématiques

Durée : 6 heures

Tout document et tout dictionnaire interdits.

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve, conformément à la circulaire n° 86-828, du 28 juillet 1986.

NOTATIONS

Dans ce problème $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et n est un entier non nul.

Soit A une matrice. On note ${}^t\mathrm{A}$ sa matrice transposée, $\mathrm{A}_{i,j}$ le coefficient de sa i-ème ligne et j-ème colonne et AB son produit par la matrice B. Si x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on le considère comme une matrice à une colonne, en particulier ${}^t x$ est une matrice à une seule ligne. On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par ${}^t e_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \ldots, \delta_i^n)$ où $\delta_i^i = 1$ et $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$. $\mathscr{E} = (e_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ est donc la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des $(n \times n)$-matrices à coefficients réels et I_n la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $x \longrightarrow \mathrm{A}x$ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ noté encore A. Par ailleurs, on pose $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$ et on définit la matrice A^i pour $i \geqslant 1$ par la relation de récurrence $\mathrm{A}^{i+1} = \mathrm{A}^i\mathrm{A}$. Le polynôme $\mathrm{P}(t) = \det(t\,\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$ est appelé *polynôme caractéristique* de la matrice A.

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note I_V l'endomorphisme identité de V. Soit a un endomorphisme de V, on note $a \circ b$ son composé avec l'endomorphisme b, on note $a \cdot x$ l'image par a du vecteur x de V et on note $a(\mathrm{E})$ l'image par a du sous-espace vectoriel E, d'autre part on définit pour tout entier i un endomorphisme a^i par $a^0 = \mathrm{I}_\mathrm{V}$ et par la relation de récurrence $a^{i+1} = a^i \circ a$.

Si $\mathscr{E}$ est une base de V, on note $\mathrm{Mat}\,(a, \mathscr{E})$ la matrice de l'endomorphisme a de V dans la base $\mathscr{E}$. Le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}\,(a, \mathscr{E})$, qui ne dépend pas de la base $\mathscr{E}$, sera noté $\det(a)$. Le polynôme $\mathrm{P}(t) = \det(t\,\mathrm{I}_\mathrm{V} - a)$ sera appelé *polynôme caractéristique* de a.

Un polynôme sera dit unitaire si le coefficient de son terme de plus grand degré est égal à 1. On remarquera qu'un polynôme caractéristique est toujours unitaire. Si P est un polynôme à coefficients réels, on appelle racine de P tout nombre *complexe* qui annule P. Le *polynôme minimal* d'un endomorphisme a est le polynôme unitaire de plus petit degré P tel que $\mathrm{P}(a) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

On dit qu'un endomorphisme r d'un espace vectoriel V est une pseudo-réflexion si l'endomorphisme $r - I_V$ est de rang 1.

1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit r une pseudo-réflexion de V et soit K le noyau de l'endomorphisme $r - I_V$.

   a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel K ?

   b. Soit $\mathscr{E}$ une base de K et u un vecteur de V qui n'appartient pas à K. Montrer que $\mathscr{E} \cup \{u\}$ est une base de V. Écrire la matrice de l'endomorphisme r dans cette base et montrer que le vecteur $r \cdot u - \det(r)u$ appartient à K.

   c. On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que $P(t) = (t - 1)(t - \det(r))$ est le polynôme minimal de l'endomorphisme r. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme r soit diagonalisable.

   d. On suppose $n = 2$. Caractériser, selon les valeurs de son déterminant, la nature géométrique de la pseudo-réflexion r.

2. À tout polynôme unitaire $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ à coefficients réels, on associe l'endomorphisme M_P de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\begin{cases} M_P \cdot e_i = e_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leqslant i < n ; \\ M_P \cdot e_n = -(a_n e_1 + a_{n-1} e_2 + \dots + a_2 e_{n-1} + a_1 e_n). \end{cases}$$

   a. Calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme M_P. Montrer que :

$$M_P^n + a_1 M_P^{n-1} + \dots + a_{n-1} M_P + a_n I_n = 0.$$

   b. Soit Q un polynôme unitaire à coefficients réels, de degré n, distinct de P et tel que $Q(0) \neq 0$. Montrer que l'endomorphisme M_Q de $\mathbb{R}^n$ est inversible et que $M_Q^{-1} \circ M_P$ est une pseudo-réflexion.

Partie II

1. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ et soit P son polynôme caractéristique.

   a. À tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$ on associe l'endomorphisme X_v de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$X_v \cdot e_i = A^{i-1} \cdot v.$$

   Calculer $X_v M_P \cdot e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n - 1$ puis $X_v M_P \cdot e_n$.

   b. On pose :

$$C_A = \{X \in M_n(\mathbb{R}) ; \; X M_P = AX\}.$$

   Montrer que X_v appartient à C_A et que $\dim C_A \geqslant n$.

2. *a.* On pose :

$$\mathscr{T} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) ; \; X_{i,j} = X_{i+1,j+1} \text{ pour } 1 \leqslant i, j \leqslant n - 1\}.$$

   Vérifier que $\mathscr{T}$ est un espace vectoriel et calculer sa dimension.

   b. Soit X une matrice telle que ${}^tM_P X M_P = X$. Montrer que X appartient à $\mathscr{T}$.

3. On dira que le polynôme P à coefficients réels, unitaire, de degré n, est *réciproque* s'il vérifie la relation $t^n\,P(1/t) = P(0)\,P(t)$ pour tout nombre réel t non nul.

   a. Caractériser les polynômes réciproques d'abord à partir de leurs coefficients puis à partir de l'ensemble de leurs racines, avec multiplicité.

   b. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ de polynôme caractéristique P réciproque. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice ${}^tA^{-1}$. En déduire que :

$$C_{M_P^{-1}} = \{X \in M_n(\mathbf{R})\,;\ {}^tM_P\,X\,M_P = X\}.$$

4. Soit P et Q deux polynômes unitaires réciproques de degré n.

   a. Montrer qu'il existe une matrice X de $M_n(\mathbf{R})$, non nulle et telle que :

$${}^tM_P\,X\,M_P = {}^tM_Q\,X\,M_Q = X. \qquad (*)$$

   b. Montrer qu'il existe une matrice X de $M_n(\mathbf{R})$, non nulle, symétrique ou antisymétrique, qui vérifie la condition (*).

   c. Trouver explicitement une matrice symétrique X vérifiant (*) dans le cas où $P(t) = t^3 + 5t^2 - 5t - 1$ et $Q(t) = t^3 + 4t^2 + 4t + 1$ (on pourra utiliser la forme bilinéaire symétrique associée à la matrice X).

Partie III

On considère un espace vectoriel V de dimension finie n et deux automorphismes a et b de V tels que l'automorphisme $b^{-1} \circ a$ soit une pseudo-réflexion. On note P (respectivement Q) le polynôme caractéristique de a (respectivement b) et W le noyau de l'endomorphisme $b - a$.

1. Quelle est la dimension de W ?

2. Soit E un sous-espace vectoriel de V, non réduit à $\{0\}$, tel que :

$$a(E) = b(E) = E.$$

   a. Soit a' la restriction de a à E. Que peut-on dire du polynôme caractéristique de a' ?

   b. On suppose que l'espace vectoriel E est contenu dans W. Montrer que les polynômes P et Q ne sont pas premiers entre eux.

   c. On suppose que l'espace vectoriel E est distinct de V et n'est pas contenu dans W. Soit $\mathcal{E}$ une base de E. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ non vide de vecteurs de W telle que $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ soit une base de V. Comparer l'écriture des matrices $\mathrm{Mat}(a, \mathcal{E} \cup \mathcal{F})$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{E} \cup \mathcal{F})$ et en déduire que les polynômes P et Q ne sont pas premiers entre eux.

   d. Que peut-on dire si les polynômes P et Q sont premiers entre eux ?

3. On suppose maintenant que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

   a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $a^{-j}(W)$? Montrer que l'espace vectoriel $\bigcap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(W)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

   b. Soit v un vecteur non nul de $\bigcap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(W)$. Montrer que les vecteurs $a^j \cdot v\ (0 \leqslant j \leqslant n-1)$ forment une base $\mathcal{E}$ de V (on pourra considérer l'espace vectoriel E qu'ils engendrent et montrer que, si $\dim E < n$, alors $E \subseteq W$).

   c. Montrer que $\mathrm{Mat}(a, \mathcal{E}) = M_P$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{E}) = M_Q$.

   d. On suppose que $P = t^n - 1$ et $Q = t^n + 1$. En examinant l'action de a et b sur les vecteurs de la base $\mathcal{E}$ et sur leurs opposés, montrer que le groupe G engendré par a et b est fini.

Tournez la page S.V.P.

Partie IV

On reprend les notations de la partie III et on suppose en outre que les polynômes P et Q sont réciproques et premiers entre eux.

1. *a.* Vérifier que les résultats obtenus dans les parties II et III prouvent l'existence d'une forme bilinéaire sur V, non nulle, symétrique ou antisymétrique et vérifiant pour tous vecteurs x et y de V :

$$f(a\cdot x,\ a\cdot y) = f(b\cdot x,\ b\cdot y) = f(x,\ y).$$

b. En considérant l'ensemble E des vecteurs u de V tels que $f(u,\ x) = 0$ pour tout vecteur x de V, montrer que la forme f est non dégénérée.

c. Montrer que toute forme linéaire définie sur V peut s'exprimer au moyen de f.

2. On note p l'endomorphisme (de rang 1) $b^{-1}\circ a - \mathrm{I}_{\mathrm{V}}$.

a. Montrer qu'il existe des vecteurs v et w, non nuls, de V tels que :

$$p\cdot x = f(v,\ x)w. \qquad (**)$$

b. Vérifier que $c = \det(b^{-1}\circ a) = \mathrm{P}(0)/\mathrm{Q}(0) = \pm 1$. En utilisant I. 1. *c.*), montrer que $p^2 + (1-c)p = 0$.

c. Calculer $f(p\cdot x + x,\ p\cdot y + y)$ directement puis en utilisant les propriétés d'invariance de f. Montrer que $c\,f(w,\ w)\,v + f(v,\ w)\,w = 0$.

3. *a.* On suppose f antisymétrique. Montrer que $\det(a) = \det(b)$.

b. On suppose f symétrique. Montrer que $\det(a) \neq \det(b)$ (on pourra remarquer que, si $c = 1$, $f(v,\ x)\ f(w,\ x) = 0$ et $(f(v,\ x))^2\ f(w,\ y) = 0$ pour tout x et y). Montrer qu'il existe un vecteur u de V tel que $p\cdot x = \pm\ f(u,\ x)u$.

c. Discuter la symétrie de f selon l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de l'un des polynômes P ou Q.

4. On suppose qu'il existe une forme bilinéaire symétrique f non dégénérée et un vecteur u, non nul, tels que $p\cdot x = -f(u,\ x)u$.

a. Vérifier que :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{V}} + p\circ(\mathrm{I}_{\mathrm{V}} - tb^{-1})^{-1} = b^{-1}\circ(a - t\mathrm{I}_{\mathrm{V}})\circ b\circ(b - t\mathrm{I}_{\mathrm{V}})^{-1}.$$

b. Soit ℓ une forme linéaire sur V et L l'endomorphisme de V défini par $\mathrm{L}\cdot x = \ell(x)u$. Montrer que $\det(\mathrm{I}_{\mathrm{V}} + \mathrm{L}) = 1 + \ell(u)$.

En déduire que :

$$\frac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{Q}(t)} = 1 - f(u, (\mathrm{I}_{\mathrm{V}} - tb^{-1})^{-1}\cdot u).$$

5. En plus des hypothèses de la question 4., on suppose que les racines de Q sont toutes réelles et simples. On note S l'ensemble de ces racines.

a. Montrer qu'il existe une famille de vecteurs $(u_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{S}}$ telle que :

$$b\cdot u_\lambda = \lambda u_\lambda \quad \text{et} \quad u = \sum_{\lambda\in\mathrm{S}} u_\lambda.$$

b. Soient λ et μ des éléments de S tels que $\lambda\mu \neq 1$. Montrer que $f(u_\lambda,\ u_\mu) = 0$.

c. Montrer que, pour tout réel t non dans S, on a :

$$\frac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{Q}(t)} = 1 - \sum_{\lambda\in\mathrm{S}} f(u_{1/\lambda},\ u_\lambda)/(1 - t\lambda^{-1}).$$

En déduire que, pour tout λ dans S, on a :

$$f(u_\lambda,\ u_{1/\lambda}) = -\frac{\mathrm{P}(\lambda)}{\lambda\mathrm{Q}'(\lambda)}.$$

6. Dans cette question on suppose que le groupe d'endomorphismes G de V engendré par a et b est fini. On suppose en outre que les racines des polynômes P et Q sont simples. On choisit une base $\mathscr{E}$ de V et on note $V_{\mathbb{C}}$ le C-espace vectoriel de base $\mathscr{E}$. On note $\overline{a}$ (resp. $\overline{b}$) l'endomorphisme de $V_{\mathbb{C}}$ défini par $\mathrm{Mat}(\overline{a}, \mathscr{E}) = \mathrm{Mat}(a, \mathscr{E})$ (resp. $\mathrm{Mat}(\overline{b}, \mathscr{E}) = \mathrm{Mat}(b, \mathscr{E})$).

   a. Montrer que les racines de Q sont des racines de l'unité.

   b. Soient $\{e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ les vecteurs de la base $\mathscr{E}$. On définit sur $V_{\mathbb{C}}$ un produit scalaire par la formule :

$$< \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,,\ \sum_{i=1}^{n} y_i e_i > \ = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i .$$

   Montrer que l'application $f : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(x, y) = \sum_{g \in G} < g \cdot x, g \cdot y >$$

   est un produit scalaire sur $V_{\mathbb{C}}$ et que, pour tous vecteurs x et y de V et tout endomorphisme h de G, on a $f(h \cdot x, h \cdot y) = f(x, y)$.

   Vérifier que $P(0)Q(0) = -1$.

   c. Quitte à échanger les rôles de P et Q, on suppose $Q(0) = -1$. Montrer que les fonctions $h(t) = e^{-int/2}\,P(e^{it})$ et $k(t) = ie^{-int/2}\,Q(e^{it})$ prennent des valeurs réelles lorsque la variable t est réelle. Montrer que la fonction k est périodique de période 4π, qu'elle s'annule $2n$ fois sur chaque période en changeant de signe à chaque fois.

   d. À chaque valeur propre λ de $\overline{b}$ on associe un vecteur propre u_λ dans $V_{\mathbb{C}}$ de telle sorte que $u = \sum_{\lambda \in S} u_\lambda$.

   En s'inspirant des calculs de 5., montrer que, pour toute valeur propre $\lambda = e^{i\alpha}$ de $\overline{b}$, $h(\alpha)/k'(\alpha)$ est un réel négatif.

   e. Montrer que les racines des polynômes P et Q sont entrelacées sur le cercle unité, c'est-à-dire que, lorsqu'on parcourt le cercle unité dans le sens trigonométrique, on rencontre alternativement une racine de P et une racine de Q.

J. 2224

SESSION DE 1991

concours interne de recrutement de professeurs agrégés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

deuxième épreuve de mathématiques

Durée : 6 heures

Tout document et tout dictionnaire interdits.

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve conformément à la circulaire n° 86-828 du 28 juillet 1986.

La précision des démonstrations et la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

PREMIÈRE PARTIE

Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle :

(E_0) $$3(x^2+x)y''+(8x+3)y'+2y=0$$

dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x.

1.1. Rechercher pour (E_0) une solution développable en série entière autour de 0, et vérifiant la condition $y(0)=1$.

On précisera l'intervalle I sur lequel la fonction f obtenue est solution de (E_0).

1.2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles. On remarquera que f est la restriction à I d'une fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ pour un choix convenable de α.

1.3. En exploitant les résultats précédents, déterminer toutes les solutions de (E_0). On en donnera l'expression au moyen des fonctions usuelles.

Tournez la page S.V.P.

DEUXIÈME PARTIE

Comparaison d'une série et d'une intégrale

Dans cette partie, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de ses sommes partielles :

$$S_0 = 0 \qquad \forall n,\ n \geq 1, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}.$$

On suppose dans les questions 2.1. à 2.4. que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

2.1. Prouver que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est convergente, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$ est $+\infty$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n x^n}{n!} \text{ convergent.}$$

2.2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad B(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n x^n}{n!}$.

Justifier la dérivabilité de la fonction B et prouver que l'on a :

$$B(x) = \int_0^x e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n t^n}{n!}\, dt.$$

2.3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, convergente et de limite L. Prouver que l'on a :

$$\lim_{x\to\infty} \left[e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \right] = L.$$

a. Dans le cas L = 0 d'abord.

b. Étendre la propriété au cas L quelconque.

2.4. Prouver l'égalité :

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n t^n}{n!}\, dt.$$

2.5. On suppose, dans cette question, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ divergente.

Prouver que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n t^n}{n!}\, dt$ peut cependant avoir un sens.

On pourra utiliser à cet effet une suite géométrique.

La suite du problème consiste à montrer par l'étude d'un exemple que, lorsqu'on connait une solution d'une équation différentielle sous forme d'une série entière :

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

admettant un certain rayon de convergence R, il peut se produire que, pour certaines valeurs de x supérieures à R, l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n t^n}{n!} dt$ converge et fournisse un prolongement de la solution initialement obtenue.

TROISIÈME PARTIE

Soit l'équation différentielle :

(E) $$3(x^2 + x) y'' + (7x + 2) y' + y = 0$$

dans laquelle y désigne une fonction numérique inconnue de la variable réelle x.

3.1. Soit $x_0 > 0$ et soient $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ quelconques.
Justifier l'existence et l'unicité d'une solution f de l'équation (E) sur l'intervalle $]0, \infty[$, vérifiant les conditions

$$f(x_0) = y_0 \qquad f'(x_0) = y_1 .$$

3.2. Rechercher pour (E) une solution développable en série entière autour de 0, et telle que $y(0) = 1$.
On notera $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la solution obtenue, dont on précisera le rayon de convergence.

3.3. On pose pour tout x réel $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$. Légitimer la définition de G et vérifier que G est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

(E_1) $$3xy'' + (3x + 2) y' + y = 0 .$$

3.4. Prouver que l'on a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} G(xt)\, dt .$$

QUATRIÈME PARTIE

Étude d'une suite de fonctions

4.1. Montrer que l'application N, de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \qquad N(X, Y) = \left(X^2 + \frac{1}{2} Y^2\right)^{1/2}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Dans toute la suite, si $V = (X, Y)$ est un élément de $\mathbb{R}^2$, on utilisera les notations $N(X, Y) = \| V \|$ ou $N(X, Y) = \| (X, Y) \|$.

Tournez la page S.V.P.

4.2. À tout réel t non nul, on associe l'endomorphisme L_t de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique est donnée par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3t} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit k un réel strictement supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Montrer qu'il existe un réel t_0 strictement positif tel que :

$$\forall t, t \geq t_0, \quad \forall (X, Y), \quad (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \quad \| L_t(X, Y) \| \leq k \| (X, Y) \|.$$

Dans les questions suivantes, k et t_0 sont fixés ainsi.

4.3. Soit $V_0 = (a, b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$. On lui associe la suite des fonctions $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, par les relations suivantes :

$$\forall t \in [t_0, \infty[, \quad Z_0(t) = V_0; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_n = (X_n, Y_n);$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [t_0, \infty[, \quad X_{n+1}(t) = a + \int_{t_0}^{t} \left[-\frac{2}{3\lambda} X_n(\lambda) + \frac{1}{4} Y_n(\lambda) \right] d\lambda$$

$$Y_{n+1}(t) = b + \int_{t_0}^{t} X_n(\lambda)\, d\lambda.$$

Prouver que, $\forall t, t \geq t_0, \quad \| Z_1(t) - Z_0(t) \| \leq k(t - t_0) \| V_0 \|$

et que $\forall n \geq 1, \quad \forall t, t \geq t_0, \quad \| Z_{n+1}(t) - Z_n(t) \| \leq k \int_{t_0}^{t} \| Z_n(\lambda) - Z_{n-1}(\lambda) \| d\lambda.$

4.4. En déduire que, $\forall t, t \geq t_0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > p$, on a :

$$\| Z_n(t) - Z_p(t) \| \leq \| V_0 \| \sum_{m=p+1}^{n} \frac{k^m (t - t_0)^m}{m!}$$

et que la suite Z_n converge uniformément sur tout intervalle $[t_0, t_1]$, pour $t_1 \in]t_0, \infty[$; on désigne par Z sa limite.

CINQUIÈME PARTIE

5.1. Effectuer dans (E1) le changement de fonction inconnue

$$y(x) = z(x) \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

On appellera (E2) l'équation différentielle obtenue, dont z est la fonction inconnue.

5.2. Soit l'équation (E3), dont l'inconnue est une fonction :

$$t \longrightarrow \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} \quad \text{de } \mathbb{R}^{+*} \text{ vers } \mathbb{R}^2$$

(E3) $$\begin{bmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix} = A(t) \cdot \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}$$

où A (t) désigne la matrice définie en 4.2.

Soient $t_0 > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de (E3), sur l'intervalle $]0, \infty[$ satisfaisant aux conditions $X(t_0) = a$, $Y(t_0) = b$.

5.3. On reprend les notations de la partie 4. Montrer que, sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, la fonction Z est solution de (E3).

5.4. En utilisant ce qui précède, déterminer pour toute solution sur l'intervalle $]0, \infty[$ de (E1) une fonction de type exponentiel la majorant au voisinage de $+\infty$. On commencera par comparer les solutions de (E2) et de (E3).

5.5. Prouver que, pour $x \in [1, 2+2\sqrt{2}[$, l'intégrale figurant dans l'égalité 3.4. a un sens.

5.6. Prouver que, pour tous x_1, x_2 tels que $0 < x_1 < x_2 < 2 + 2\sqrt{2}$, il existe $\delta > 0$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, M_1, M_2 tels que :

$$\forall x \in [x_1, x_2]\ ,\ \forall t \geq t_1\ ,\ e^{-t}\,|\,G'(xt)\,| \leq M_1 \exp(-\delta t)$$
$$\forall x \in [x_1, x_2]\ ,\ \forall t \geq t_2\ ,\ e^{-t}\,|\,G''(xt)\,| \leq M_2 \exp(-\delta t)\,.$$

Prouver alors que :

$$x \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-t}\, G(xt)\, dt$$

est solution de (E) sur $]-1, 2+2\sqrt{2}[$.