

## Mots flous

*Quel beau titre pour une nouvelle chronique de la Commission «Mots»!*

*Quotidiennement, nous manipulons des mots auxquels nous croyons avoir attribué un sens précis...dont nous voyons très vite qu'il n'est pas le même pour nos élèves ou nos étudiants. Nombreux sont ces mots sur lesquels nous «jouons»; nous parlerons aujourd'hui de ceux qui tournent autour de la preuve:*

*DEMONSTRER, PROUVER, ETABLIR, MONTRER.*

*Bien d'autres viendront par la suite ; vous les retrouverez au fil de nos Bulletins.*

*Les divers commentaires et notes en italique sont dûs à Antoine BODIN, Michel HENRY (IREM de Besançon) et à Evelyne BARBIN (IREM de Paris-Nord), que nous remercions ici de leur aimable collaboration.*

## DÉMONSTRER

*Le mot démonstration n'est pas propre à la Science Mathématique. Il suffit d'ouvrir un ouvrage de philosophie pour s'en convaincre.*

*«Une démonstration est une déduction destinée à prouver la vérité de sa conclusion en s'appuyant sur des prémisses reconnues ou admises comme vraies.»*

*Vocabulaire technique et critique de la philosophie - André LALANDE - P.U.F.*

*«Preuve est un terme du langage courant et il évoque un contexte psychologique et social: la preuve s'attaque à un doute ou à une objection réelle; elle a pour objet de faire partager une conviction.*

*Démonstration est un terme du vocabulaire scientifique, et il évoque le processus de la pensée hypothético-déductive qui cherche à savoir, non pas ce qui est, mais ce qui serait si certaines conditions qui constituent la donnée du problème se trouvaient réalisées. De plus si toutes les démonstrations peuvent être appelées preuves, toutes les preuves ne constituent pas des démonstrations...Dans certains cas pour prouver on se contente de produire un fait qui met fin au doute; nous avons là une preuve qui n'est pas une démonstration.»*

*Foulquié - dictionnaire de la langue philosophique.*

I. Le mot «démonstration» donc, s'il n'est pas uniquement réservé aux mathématiques, est très souvent utilisé dans leur enseignement, et demeure très difficile à définir.

«Démontrer une propriété, c'est la déduire d'autres propriétés, déjà connues», dit-on parfois.

Mais, que signifie «déduire»? «propriétés»? «propriétés connues»? Souvent on démontre aux enfants, ou on leur demande de démontrer, des propriétés qu'ils ont déjà utilisées pour peu qu'ils aient manipulé une règle, un compas et une équerre. Ils sont d'ailleurs étonnés qu'on éprouve le besoin d'une démonstration: «Deux droites du plan perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles? Mais il y a déjà bien longtemps qu'on le sait!». Ils «connaissent» déjà la propriété à démontrer...

On est alors tentés de préciser «connues, cela signifie posées comme axiomes ou déjà démontrées»; mais c'est employer *démontrées* dans la définition de *démontrer*... De plus, que signifie *axiome*?

II. Ce dernier mot est pourtant important, car, comme l'écrit Gilbert Walusinski (1) en 1974:

«...je ne peux user de démonstration que dans le cadre d'un modèle mathématique, dans une axiomatique déterminée; dans tout autre domaine, on appelle abusivement «démonstration» ce qui n'est que tentative pour prouver par arguments divers. On attribue à Cézanne cette boutade: "Celui qui me démontre que la Joconde est un chef-d'œuvre, je lui paye un litre!". On ne peut mieux dire puisqu'il n'existe pas un modèle axiomatisé de la beauté en peinture».

Cela dit, il n'est pas nécessaire (et, à notre avis, pas souhaitable, en particulier au Collège), pour initier à la démonstration, d'introduire en classe une axiomatique, en géométrie aussi bien qu'en algèbre; les programmes de 1979 pour la Quatrième et la Troisième y ont heureusement renoncé.

III- Même entre enseignants, le mot *démontrer* suscite des controverses:

• Les dessins des pages 52 à 54 de la brochure APMEP *Elem-Math VI: Le triangle à l'école élémentaire*, constituent-ils à eux seuls des démonstrations du théorème de Pythagore? Les démonstrations des mathématiques chinoises se résumaient souvent à «Regarde» (2)

• Un «déductogramme» (disposition schématique d'une démonstration sous forme d'arbre) a-t-il même valeur démonstrative qu'une rédaction en français?

En fait, la notion de démonstration a un caractère à la fois social, culturel, conventionnel et historique. Elle a varié au cours des siècles. Et, à une époque donnée, on n'exige pas, pour un sujet donné, les mêmes démonstrations d'un élève de collège et d'un candidat au professorat de mathématique...

(1) dans «l'Ecole Libératrice» n° 30 du 17.5.1974, p.1491

(2) cf l'article de J.C.MARTZLOFF dans «la Démonstration mathématique dans l'histoire» (Colloque Inter-IREM de Besançon-Diffusion IREM de Lyon).

IV . Terminons en évoquant une autre controverse dans laquelle nous prendrons parti :

Certains enseignants refusent de considérer comme démonstration la méthode consistant à «épuiser les cas»; expliquons-nous sur un exemple :

Soit à démontrer que tout naturel non nul de la forme  $\overline{aaa}$  est un multiple de 37. Une première démonstration, irréfutable, consiste à établir que les neuf naturels dont il est question (111, 222, ... , 999) sont multiples de 37. Ces neuf calculs peuvent suggérer une autre démonstration fondée sur les égalités :

$$37 \times 3 = 111 \quad \text{et} \quad \overline{aaa} = a \times 111 .$$

On peut la considérer comme plus élégante que la première. Elle a surtout le mérite de s'étendre facilement aux naturels de la forme  $\overline{aabb}$  . La démonstration «par épuisement des cas» serait fastidieuse puisque comportant 90 calculs, mais elle serait rigoureuse.

## PROUVER

Y a-t-il une nuance entre «preuve» et «démonstration»? Dans la littérature oui, aussi bien en philosophie qu'en didactique :

**PREUVE** . «Opération amenant l'intelligence d'une manière universellement convaincante (du moins en droit), à reconnaître la vérité d'une proposition considérée d'abord comme douteuse.

*La preuve est en général un raisonnement, mais pas toujours: elle peut consister en une présentation de fait qui lève le doute. De là vient que ce mot, en un sens pour ainsi dire matériel, s'applique aussi en fait au document qui prouve quelque chose.*

*D'autre part, la preuve se distingue par son caractère de vérité, des formes du raisonnement hypothético-déductif, où l'on montre seulement qu'il y a un lien nécessaire entre certaines prémisses et certaines conséquences, sans rien prononcer assertoriquement sur celles-ci. L'idée de preuve appartient au même ordre de notions logiques que celle de doute, de réfutation, de certitude.*

*(La question est posée en remarque de savoir si un fait peut ou non constituer une preuve. «La preuve est toujours un raisonnement: jamais la présentation d'un fait n'est en soi une preuve; c'est simplement un moyen de l'établir;» L.Boisse)*

*Vocabulaire technique et critique de la philosophie - André Lalande - P.U.F.*

*«Lorsqu'une explication est reconnue et acceptée, il convient, pour la désigner de disposer d'un terme qui permette de marquer son détachement du sujet locuteur. En mathématique, il est clair que le terme «démonstration», du fait de son acception très spécifique, ne convient pas. Nous retiendrons celui de preuve...*

*N.BALACHEFF (Thèse)*

Nous proposerons toutefois ici de renoncer à cette subtile distinction (3).

La célèbre «preuve par 9» prouve (à supposer qu'elle ait été menée elle-même sans erreur de calcul):

- ou bien que le calcul est erroné,
- ou bien que le résultat obtenu et le résultat exact ont pour différence un multiple de 9.

Elle n'est donc pas la *preuve* que le résultat obtenu est exact. Et, de ce fait, elle n'est qu'un «test»: on ferait mieux de l'appeler «test par 9».

## ÉTABLIR

Ce mot semble synonyme de *démontrer*.

## MONTRE

I - Voici quelques emplois de ce mot dans le langage courant:

«On montre du doigt un dessin»

«Le guide montre au loin le sentier que nous allons suivre»

«Montre-moi tes talents de cuisinier»

«La fable montre l'insouciance de la cigale et la dureté de la fourmi»

Dans les deux premières phrases, *montrer* évoque un geste, du doigt ou de la main, et des yeux qui regardent; le substantif complément désigne un objet concret (dessin, sentier).

Dans la troisième, *montrer* pourrait être remplacé par *prouver*, ou par «donner une preuve de».

Dans la quatrième, *montrer* a un sens intermédiaire entre les deux précédents: il a comme compléments des substantifs, mais désignant des notions abstraites (insouciance, dureté); il se rapproche de *prouver* tout en conservant un aspect descriptif.

II- En classe de mathématiques aussi, *montrer* a plusieurs sens:

«Va au tableau montrer l'hypoténuse»; c'est ici le même sens que dans les deux premières phrases du paragraphe I.

«Voici une dizaine de nombres écrits sur ta feuille; montre m'en un qui est plus grand que son carré»: même emploi.

«Montre par un dessin, ou plusieurs, que les trois hauteurs d'un triangle concourent». Si *montrer* a encore même sens que dans les deux phrases précédentes, on attend que l'examen des dessins amène à dire que les hauteurs *semblent* concourir (du moins si aucun des dessins ne «montre» un triangle délimité par les hauteurs!). Mais la formulation est alors malencontreuse; il vaudrait mieux dire «Montre que les trois

---

(3) Les Anglais, les bienheureux, n'ont qu'un seul mot, «to proof»!

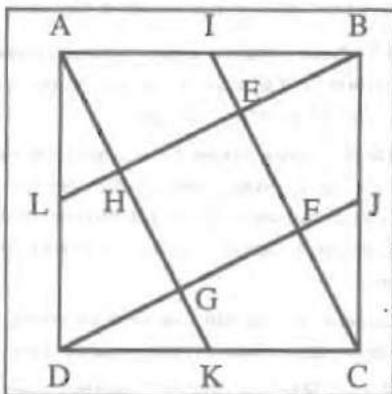
hauteurs semblent concourir», ou mieux encore: «Les trois hauteurs d'un triangle concourent-elles?». On aboutit à une conjecture, et non à un fait démontré.

Si au contraire on emploie ici *montrer* au sens de *démontrer*, il faut supprimer «par un dessin, ou plusieurs», et dire: «Montre que les trois hauteurs d'un triangle concourent».

De même la phrase: «Montre que les nombres plus grands que leur carré sont des nombres strictement compris entre 0 et 1» demande une démonstration, par exemple la résolution de l'inéquation  $a > a^2$ ; et *montrer* est alors synonyme de *démontrer*.

### III- Voici un exercice:

«Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré; I, J, K, L sont les milieux de ses côtés. Montrer que l'aire du carré ABCD est cinq fois l'aire du carré EFGH.»



Notons d'abord que l'énoncé affirme que EFGH est un carré; est-ce une façon de dispenser l'élève de le démontrer, ou bien l'auteur attend-il de l'élève qu'il le démontre ?

Une fois admis ou démontré que EFGH est un carré, on peut *montrer* la propriété visée en découpant à l'aide de ciseaux:

- les triangles ABF, BCG, CDH, DAE et en les assemblant de façon à faire apparaître (de façon à *montrer*) un carré d'aire quadruple de l'aire du carré EFGH;
- ou bien les triangles AIE, BJF, CKG et DLH et en les faisant tourner de  $180^\circ$  autour de I, J, K, L respectivement, de façon à faire apparaître une croix d'aire quintuple de l'aire du carré EFGH.

On peut montrer par des mesurages au double décimètre que les longueurs AE, EF et 2FJ paraissent «voisines»; si on admet que  $AE = EF = 2FJ$ , on en déduit (on *démontre*) que  $EF = 2/5 AJ$ ;  
on *démontre*, par le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABJ, que

$$AJ = AB \frac{\sqrt{5}}{2}$$

et, de là que

$$EF = \frac{1}{\sqrt{5}} AB$$

et que

$$\text{aire EFGH} = 1/5 \text{ aire ABCD}$$

mais en fin de compte on ne l'a pas démontré complètement.

On peut enfin *démontrer* la propriété sans utiliser ni découpages, ni mesurages.

Pour le professeur qui a intentionnellement laissé du flou dans son énoncé, il est intéressant de confronter en classe les diverses façons dont les élèves ont répondu; mais il serait inadmissible, en particulier lors d'un examen, de considérer comme fautive telle ou telle interprétation de l'énoncé.

IV- Nous espérons avoir...montré l'ambiguïté de *montrer* dans ses emplois scolaires, ambiguïté d'ailleurs que les élèves de Collège révèlent souvent au professeur, et dont ils se plaignent à juste titre.

De nombreux textes d'examens emploient *montrer* et *démontrer*, les considérant parfois comme synonymes, parfois pas, ce qui provoque souvent d'interminables et stériles discussions lors de l'établissement d'un barème de correction, dont l'effet le plus clair est de dévaloriser les travaux de certains élèves, généralement les plus scrupuleux.

Lorsqu'on souhaite une démonstration, nous déconseillons l'emploi de *montrer* et conseillons *démontrer* (ou *prouver*, voire *établir*) (4)

Au Collège, un objectif essentiel pour le professeur est d'amener petit à petit les élèves à comprendre en quoi consiste une démonstration: l'idée d'étapes est essentielle dans l'apprentissage de la démonstration.

*L'habitude de varier le vocabulaire utilisé pour désigner un même objet et de considérer les répétitions comme faiblesse d'expression est une mauvaise habitude typiquement française, qu'il faut dénoncer lorsqu'il s'agit de textes scientifiques. Donc, tout à fait d'accord pour limiter et même condamner l'utilisation des pseudo-synonymes du verbe démontrer.*

(4) Si *démontrer* est escorté par *démonstration*, on ne retrouve pas ce couplage à propos de *montrer*, au moins en français, qui ne semble pas connaître le mot «monstration». Par contre, le substantif existe en occitan au sens de «production d'un échantillon». Le français possède le mot «ostention» (cf Larousse ou Littré) qui a le même sens et est utilisé depuis longtemps en didactique, où l'on parle de «preuve par ostention».

L'usage de «démontrer» signifie que l'on met l'accent sur le processus de recherche, alors que l'usage de «démonstration» signifie que l'on met l'accent sur le produit, l'écrit. L'enseignement «traditionnel» des mathématiques met l'accent surtout sur le produit, le texte, sans toujours expliciter ou faire expliciter le processus qui y conduit.