Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Dominique ROUX m'a demandé de lui succéder comme responsable de cette rubrique, et je tiens d'abord à le remercier d'une part pour les moments passionnants que j'ai connus pendant plusieurs années en tant que lecteur assidu des problèmes de l'A.P.M.E.P., d'autre part pour la confiance qu'il m'a accordée en me transmettant cette charge. Je voudrais aussi remercier tous les lecteurs qui contribuent à l'intérêt de cette rubrique : je compte sur vous tous pour la maintenir au niveau qu'elle a atteint.

Comme précédemment, cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes»... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui désormais sont à envoyer à mon adresse (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N°201 (Eugène EHRHART, Strasbourg)

La suite de Fibonacci étant définie par $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, avec $F_1 = F_2 = 1$, soit (G_n) une suite définie elle aussi par $G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$, mais, avec $G_1 = a$ et $G_2 = b$ (a et b entiers).

a) Peut-on choisir a et b de sorte que $G_n - F_n \sqrt{5}$ tende vers zéro lorsque n tend vers l'infini ?

b) A quelle condition (sur a et b) la fraction G_n / F_n est-elle irréductible pour tout n ?

ÉNONCÉN°202 (Gérald BOURGEOIS et Jean-Pierre LECHENE, Marseille).

On se donne deux cercles non concentriques : *(C)*, de centre O et de rayon 1, et (γ), de centre I et de rayon r , tels que (γ) soit strictement à l'intérieur de *(C)*, et l'on pose $OI = d$. Soit M un point de *(C)* ; on mène la tangente issue de M à (γ) qui passe à droite de (γ) pour un observateur situé en M; cette tangente recoupe *(C)* en A; en itérant l'opération, on construit B à partir de A, puis M' à partir de B. On considère la fonction f qui à tout point M de *(C)* associe l'angle $(OM,OM') \in [0,2\pi[$.

a) Quels sont les points M réalisant le maximum et le minimum de f ?

b) Quels sont les points M tels que M et M' soient diamétralement opposés ? Quels sont les couples (r,d) tels que ces points existent ?

ÉNONCÉ N°203 (Jacques AMON, Limoges).

Soit t un réel strictement compris entre 0 et 1. Deux personnes A et B ont initialement a_0 et b_0 pièces de 1 F (a_0 et b_0 entiers). La plus riche donne à l'autre t fois sa fortune, arrondi à l'entier inférieur : les nouvelles fortunes sont a_1 et b_1 (entiers). Puis, la plus riche redonne à l'autre t fois sa fortune, arrondi à l'entier inférieur, et ainsi de suite... Si à un moment, les deux personnes ont le même nombre de pièces, c'est celle qui vient de recevoir qui donne. Examiner l'évolution des états de fortune des deux personnes.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°187 (d'après S.LECLERC, 1674).

Construire à la règle et au compas un carré aussi grand que possible à l'intérieur d'un pentagone régulier donné.

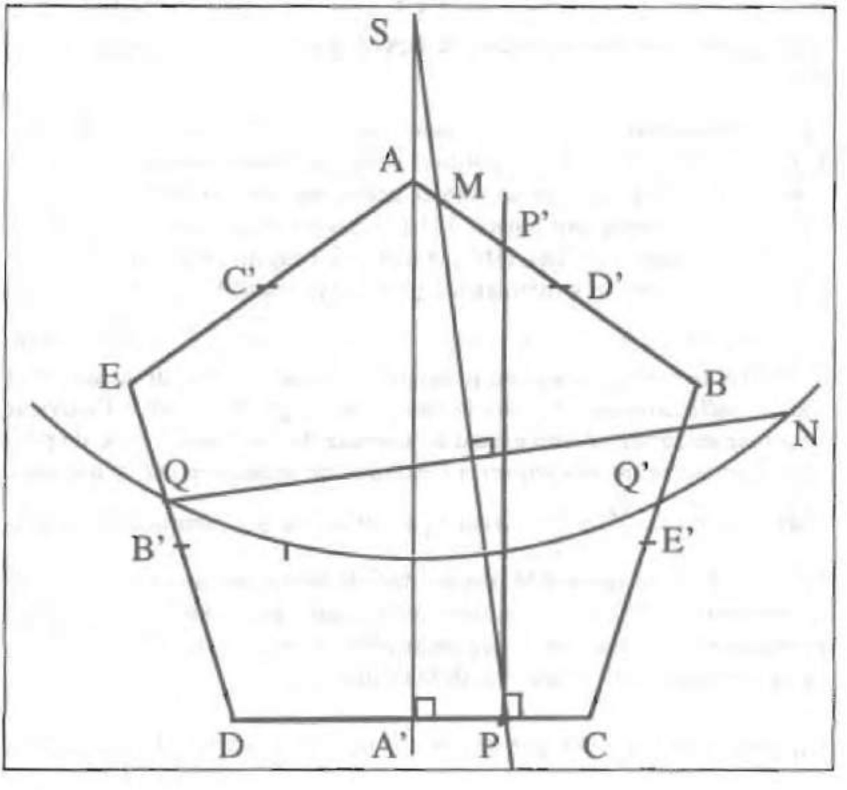
SOLUTION

Les solutions reçues étant soit incomplètes (M.DELEHAM - Reims ; Charles NOTARI - Noë), soit trop longue (René MANZONI - Le Havre), je me permets de publier une solution un peu plus succincte, la plus complète possible, mais utilisant le moins possible de calculs trigonométriques, solution que j'ai trouvée tardivement après avoir lu les autres solutions.

Soit $ABCDE$ le pentagone et $MNPQ$ le carré. Si l'un au plus des sommets du carré (par exemple M) se trouve sur un côté du pentagone, une homothétie

de centre M et de rapport $(1+\varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, transforme le carré en un carré plus grand, mais encore intérieur au pentagone. Si deux sommets consécutifs (par exemple M et N) sont sur un des côtés du pentagone, mais que P et Q sont strictement à l'intérieur, une translation de $\varepsilon\overrightarrow{NP} = \varepsilon\overrightarrow{MQ}$ nous ramène au cas précédent pour $\varepsilon > 0$ assez petit. On peut donc supposer que M et P sont sur les côtés du pentagone et, par exemple, que $M \in [AB]$.
Appelons A', B', C', D', E' les milieux des côtés du pentagone, opposés à A, B, C, D, E respectivement, et désignons par a la longueur du côté du pentagone et par b la longueur du côté du carré.

P ne peut pas être sur $[AB]$, $[BC]$ ni $[AE]$, sinon l'un des demi-cercles de diamètre MP, qui contient N ou Q, serait extérieur au pentagone, donc le carré ne serait pas intérieur au pentagone. Donc, quitte à faire une symétrie par rapport à (DD'), on peut supposer $P \in]CD]$.



Par ailleurs, comme le carré de côté CD est intérieur au pentagone, seuls nous intéressent les carrés plus grands que celui-ci ; on peut donc supposer $b > a$, ce qui entraîne d'une part que l'on ne peut peut pas avoir deux sommets du carré sur un même côté du pentagone, d'autre part que l'on ne peut pas avoir $M \in [D'B]$ et $P \in [A'C[$, car sinon

$$b\sqrt{2} = MP \leq \sup(MA',MC) \leq \sup(BA',A'D') < a\sqrt{2}$$

vu que $$BA' = \sqrt{A'C^2 + BC^2 - 2BC.A'C.\cos\frac{3\pi}{5}} = a\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{4}}$$

et $$A'D' = \frac{AD+BC}{2} = \frac{2ED.\cos\frac{\pi}{5} + BC}{2} = a\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right),$$

la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$ pouvant être calculée, par exemple, en remarquant que

$\frac{1}{2}EB = AE\cos\frac{\pi}{5} = A'D + DE\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ d'où $\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}$;
donc, quitte à faire une symétrie par rapport à (EE'), on peut supposer que $M \in [AD']$.

La perpendiculaire en P à CD coupe (AB) ou (AE) en P'. Supposons d'abord M à gauche de P' mais distinct de A ; en d'autres termes, $P \in]A'C[$ et $M \in]AP'[$. Si Q était sur un côté du pentagone $[AE]$ou $[ED]$ nécessairement), son symétrique par rapport à (MP), qui n'est autre que N, serait extérieur au pentagone : en effet, (MP) et (AA') se coupent en S, situé au dessus de A. Si Q' désigne le symétrique de Q par rapport à (AA'), N appartient au cercle de centre S passant par Q et Q', et il vérifie : $\widehat{Q'SN} = 2\,\widehat{A'SP}$. Donc Q est strictement intérieur au pentagone, et une rotation de centre P et d'angle suffisamment petit vers la gauche laisse Q strictement à l'intérieur du pentagone, amène N strictement à l'intérieur du carré initial, donc du pentagone, et amène M strictement à l'intérieur du pentagone car, d'une part, $\widehat{AMP} > \widehat{AP'P} = \frac{7\pi}{10} > \frac{\pi}{2}$, d'autre part, $M \neq A$ ce qui signifie que le cercle de centre P et de rayon PM pénètre dans le pentagone avant de recouper éventuellement AE. Donc le carré résultant, qui a trois sommets strictement à l'intérieur du pentagone, est agrandissable par homothétie de centre P ce qui prouve que $MNPQ$ n'était pas de taille maximale.

Supposons maintenant que M est à droite de P' : soit $P \in [DA']$ et

$M \in [AD']$, soit $P \in]A'C[$ et $M \in [P'D']$. La perpendiculaire en M à AB (parallèle à (DD')) coupe $[DE]$ en un point situé à gauche de (PP') ; comme M est, lui, à droite de (PP'), cette perpendiculaire coupe (PP') en T, intérieur au pentagone (on peut avoir $T = M$ ou $T = P$).
Une rotation de centre T et d'angle suffisamment petit, soit dans un sens soit dans l'autre, transformera $MNPQ$ en un carré dont trois sommets au moins sont strictement à l'intérieur du pentagone (ce qui prouve que $MNPQ$ n'est pas de taille maximale), sauf dans les deux cas suivants :

➡ 1) M, N, P, et Q sont tous les quatre situés sur des côtés du pentagone (carré inscrit),

➡ 2) L'un des sommets du carré M, N, P ou Q, est également sommet du pentagone *(figure 3)*.

Dans le premier cas, on est ramené à la figure 2, avec

$$\frac{PQ}{\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{EQ}{\sin\left(\frac{\pi}{10} + \alpha\right)} \text{ et } \frac{QM}{\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right)} .$$

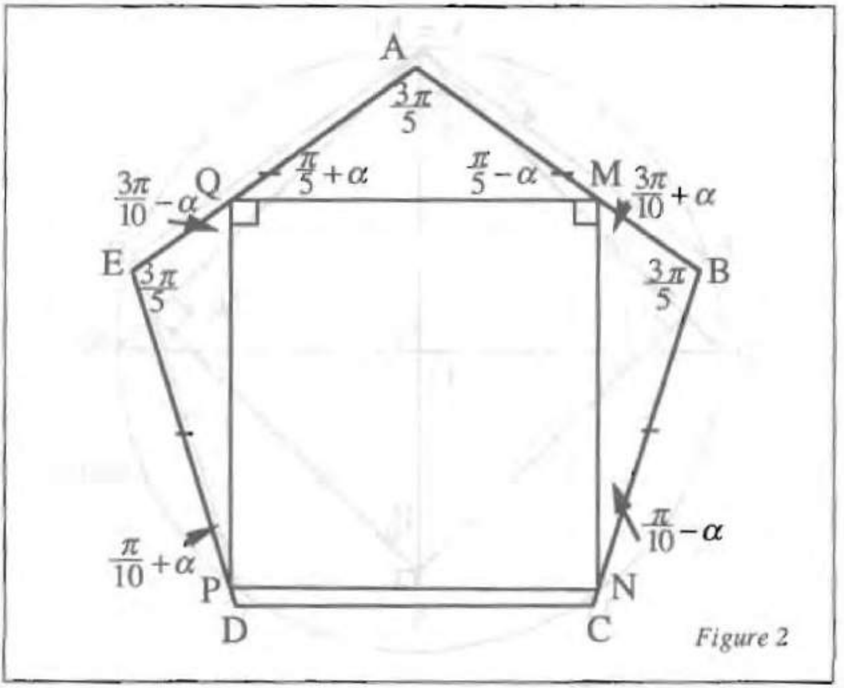


Figure 2

$$\frac{QM}{\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{AM}{\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)} \text{ et } \frac{MN}{\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{BM}{\sin\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)},$$

donc $$\frac{b}{\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{EQ}{\sin\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)} = \frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)} = \frac{EA}{2\sin\frac{3\pi}{20}\cos\left(\frac{\pi}{20}-\alpha\right)}$$

$$= \frac{AM}{\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)} = \frac{BM}{\sin\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right)} = \frac{AB}{2\sin\frac{3\pi}{20}\cos\left(\frac{\pi}{20}+\alpha\right)}$$

d'où il résulte d'une part que $\alpha = 0$, d'autre part que

$$b = \frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{3\pi}{20}\cos\frac{\pi}{20}}\, a = 1.060\,497\ldots\, a = \left(\sqrt{5} - 2\sin\frac{\pi}{5}\right) a$$ après simplification

Dans le second cas, supposons que *M* est en *A*. Traçons le cercle circonscrit au pentagone de centre *O* ; soit [*Q'N'*] le diamètre orthogonal à (*AA'*) ;

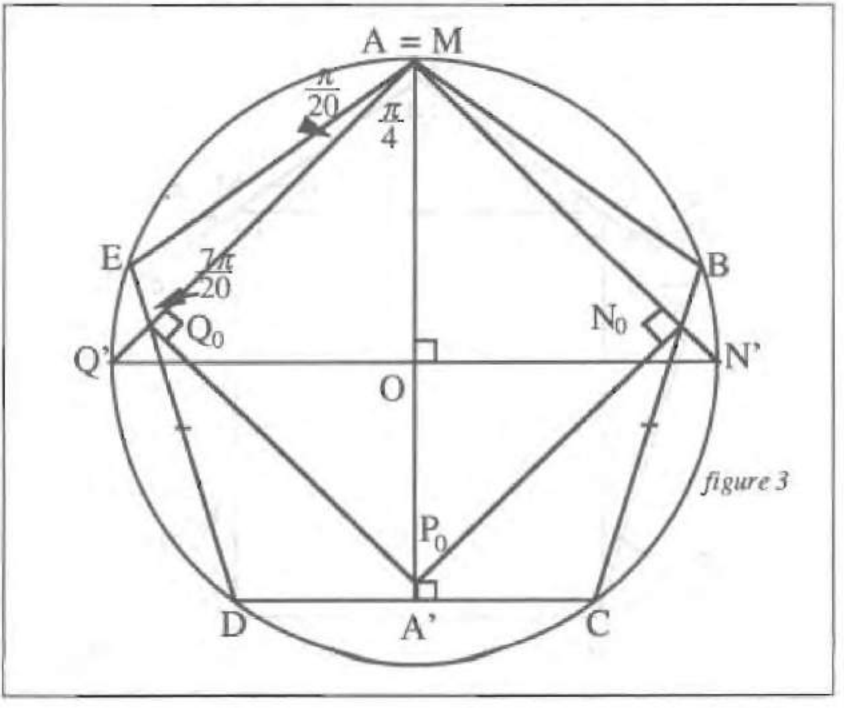


figure 3

(AQ') coupe (ED) en Q_0 et (AN') coupe (BC) en N_0. M, N_0, Q_0 sont trois sommets du

carré solution, car tout d'abord $$\frac{AQ_0}{\sin\frac{3\pi}{5}} = \frac{AE}{\sin\frac{7\pi}{20}}$$

d'où $$b = \frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{7\pi}{20}}\, a = 1.067\ 39\ldots a = \left(\sqrt{5} - \tan\frac{\pi}{5}\right)\frac{a}{\sqrt{2}}$$ après "simplifications".

(ce carré est donc plus grand que le carré inscrit), ensuite : si P_0 désigne le quatrième sommet, $P_0 \in AA'$

et $$MP_0 = b\sqrt{2} = 1{,}5095\ldots a < AA' = a\left(\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5}\right) = 1{,}538\ 84\ldots a$$

donc le carré $MN_0P_0Q_0$ est bien à l'intérieur du pentagone. Enfin, il est plus grand que tout autre carré $MNPQ$ vérifiant $M = A$, car un tel carré vérifie :

soit $\widehat{QAA'} \geq \frac{\pi}{4}$, soit $\widehat{A'AN} > \frac{\pi}{4}$, donc soit Q est dans le triangle AQ_0E, ce qui en traîne $AQ < AQ_0$ vu que $AE < AQ_0$, soit N est dans le triangle AN_0B, ce qui achève la démonstration.

Plusieurs constructions permettent d'inscrire un pentagone dans un cercle donné : je citerai celle de S.LECLERC (1674) que Dominique ROUX m'a transmise, issue de l'ouvrage dont il s'est inspiré pour poser ce problème (***Géométrie Pratique***).
Dans cet ouvrage, en effet, on explique comment construire un *quarré (sic)* inscrit dans un pentagone, en s'appuyant sur le fait que l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AE}{AM}$ transforme un tel carré en un carré de côté BE.
Mais on ne prouve ni qu'un tel carré est unique, ni qu'il n'existe pas de carré plus grand intérieur au pentagone (ce qui, nous venons de le voir, est faux).
Certaine constructions proposées dans cet ouvrage sont fausses, comme celle de l'heptagone qui revient à admettre : $\sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ mais l'erreur ainsi commise est de 0,2% ; donc, en pratique, compte tenu de la simplicité de la construction proposée, l'heptagone obtenu sera peut-être plus juste que le polygone à 17 côtés, dont la construction avec la règle et le compas est

PROPOSITION III.

Dans un cercle donné inſcrire un Pentagone & un Decagone.

A B C D ſoit le cercle propoſé.

PRATIQVE,

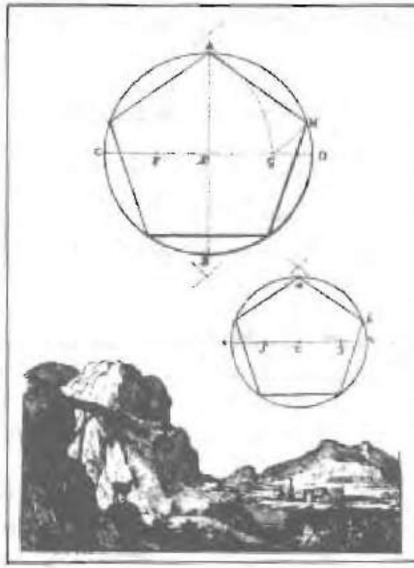
DV PENTAGONE.

Tirez les deux diametres	A B, C D
s'entrecoupant à angles droits en	E
Coupez le demy diametre	C E
en deux également en	F.
De ce point	F
& de l'intervale	F A
Deſcrivez l'arc	A G.
Du point	A
& de l'intervale	A G
Deſcrivez l'arc	G H
La ligne droite	A H

diviſera le cercle en cinq parties égales.

DV DECAGONE.

Subdiviſez chaques parties du cercle en deux également.



mathématiquement exacte, mais où les imprécisions de tracé s'accumulent. Même le pentagone est rarement précis à 0,2% près (1 mm d'erreur pour un cercle de 8 cm de rayon).

PROPOSITION XV.

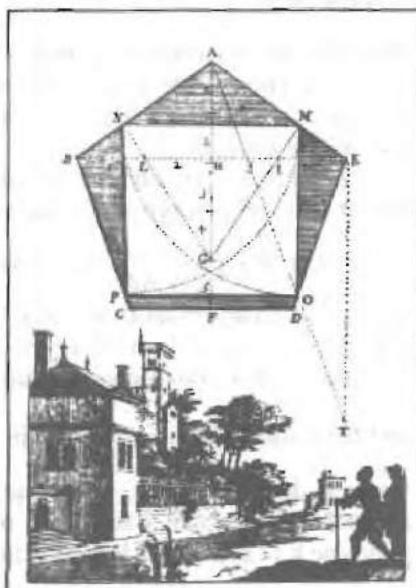
Inſcrire un Quarré dans un Pentagone.

A B C D E ſoit le Pentagone dans lequel il faut inſcrire un Quarré.

PRATIQVE.

Tirez la ligne droite	B E
Abaiſſez la perpendiculaire	E T
à l'extremité de	B E
Faites cette perpendiculaire	E T
égale à la ligne	B E.
Tirez la ligne	A T.
De la ſection	O
Menez la ligne	O P
parallele au côté	C D.
Aux extremités	O & P.
Eſlevez les perpendiculaires	O M, P N
Tirez la ligne	N M

N M O P ſera le Quarré requis.



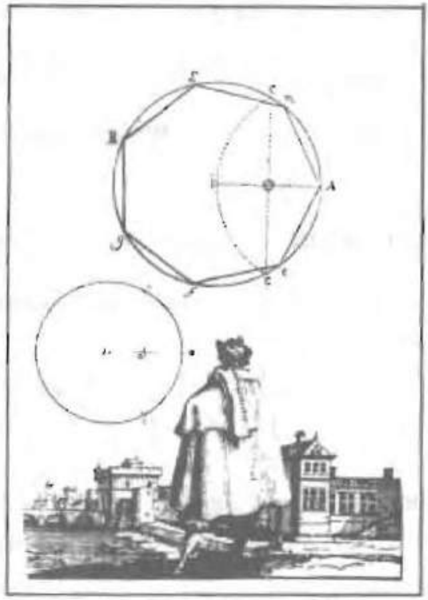
PROPOSITION IV.

Dans un cercle donné inſcrire un Eptagone.

A B C ſoit le cercle propoſé dans lequel il faut faire un Eptagone.

PRATIQVE.

Tirez le demy diametre I A.
De l'extremité A.
& de l'intervale A I
Deſcrivez l'arc C I C.
Tirez la ligne droite C C.
Portez la moitié C O
ſept fois dans la circonference du cercle, vous aurez l'Eptagone demandé.



Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que les figures se trouvaient dessinées dans le ciel, avec au dessous des personnages et des paysages. S'agissait-il seulement d'enjolivures à la mode à cette époque, ou ceci symbolisait-il le lien étroit existant entre trigonométrie (mesure d'angles) et astronomie ?

Sébastien LECLERC (1637-1714)
était géographe et graveur. Il a gravé plus de 3 000 planches et vignettes ; celles que nous présentons ici proviennent de ***Pratique de la Géométrie sur le papier*** (Paris, Guillaume de Luyne, 1674, in 12).

Robert BRUN, dans ***Le livre français*** (Paris, P.U.F., p.78) nous en dit *«Il trouva même le moyen de rendre attrayante une **Pratique de la Géométrie**, qu'il publia, en 1669, en accompagnant chaque problème de perspective de charmants croquis enlevés d'une pointe légère et capricieuse, avec quelques silhouettes bien campées au premier plan»*.

Avis aux auteurs de manuels.

ÉNONCÉ N° 188 (Concours général 1990)

Déterminer tous les nombres naturels n tels qu'il existe n nombres entiers naturels x_1 , x_2, … x_n, distincts ou non, vérifiant $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}$

SOLUTION de Gilles DESECOT (Lomé-Togo).

Désignons par E l'ensemble des entiers naturels n vérifiant la propriété énoncée.

L'égalité $k = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}$ sera notée $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$.

On peut toujours supposer que la suite (x_i) est croissante et on remarque que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ alors $x_1 \geq 2$ dès que $n \geq 2$.

➡ **1 est élément de E puisque (1) = 1**

➡ 2 n'est pas élément de E car si $(x_1, x_2) = 1$, alors $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \leq \frac{2}{x_1^2}$ et $x_1^2 \leq 2$

ce qui contredit que $x_1 \geq 2$.

➡ 3 n'est pas élément de E car si $(x_1, x_2, x_3) = 1$, alors par le même raisonnement que précédemment, on obtient $x_1^2 \leq 3$ ce qui est impossible.

➡ **4 est élément de E car (2,2,2,2) = 1.**

Ceci nous amène à remarquer que

si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ alors $(2x_1, 2x_1, 2x_1, 2x_1, x_2, \ldots x_n) = 1$

et donc que si n est élément de E, alors $n + 3$ est également élément de E.

E contient donc tous les naturels de la forme 1 + 3*a* ($a \in \mathbb{N}$).

➡ 5 n'est pas élément de E, car si $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1$, avec le même raisonnement que précédemment, $x_1^2 \leq 5$ d'où $x_1 = 2$ et $(x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{3}{4}$ puis

$x_2^2 \leq \frac{16}{3}$ d'où $x_2 = 2$ et $(x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{2}$, puis $x_3^2 \leq 6$ d'où $x_3 = 2$ et

$(x_4, x_5) = \frac{1}{4}$,puis $x_4^2 \leq 8$ d'où $x_4 = 2$ et $(x_5) = 0$, ce qui est absurde.

➡ **6 est élément de E**, car si $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 1$, toujours avec le même raisonnement, on trouve successivement $x_1 = 2$,

$(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{3}{4}$, $x_2 = 2$, $(x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{2}$.

$x_3 = 2$, $(x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{4}$, $x_4 = 3$, $(x_5, x_6) = \frac{5}{36}$, $x_5 = 3$ et $x_6 = 6$. D'où

$(2,2,2,3,3,6) = 1$ (la suite (x_i) est alors unique).
E contient donc tous les naturels de la forme $6 + 3b$ ($b \in$ N)
➡ 8 est élément de E car avec les mêmes calculs, on trouve, par exemple que $(2,2,3,3,3,3,6,6) = 1$ (la suite (x_i) n'est pas unique)
E contient donc tous les naturels de la forme $8 + 3c$ ($c \in$ N).

Conclusion : *E est donc formé de tous les naturels non nuls à l'exception de 2, 3 et 5.*

Remarque : La recherche des suites (x_i) pour $n = 8$ montre qu'il y a 4 suites possibles : $(2,2,3,3,3,3,6,6) = (2,2,2,3,3,7,14,21) = (2,2,2,3,3,9,9,18) = (2,2,2,3,4,4,12,12) = 1$.

Autres solutions :
Pierre BARNOUIN (Cabris), Luc BARRIA (Serres Morlaas), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), M. DELEHAM (Reims), Pierre DELHAY (Aubry-du-Hainaut); R. FERREOL (Paris), Denis HARTEMANN (Cayenne), Pierre-Yves LE CLOIREC (Rennes), Pierre MANAC'H (Lorient), Roger QUENTON (Seillans), Gilbert ROUX (L'Hay les Roses), Geneviève SAMBARD (Saint Quentin), Jean THEOCLISTE (Valence), M. VIDIANI (Fontaine lès Dijon), et une solution incomplète.

Edgard DELPLANCHE (Créteil) et quelques autres lecteurs (Barnouin, Ferreol, Vidiani) signalent que ce problème, avec sa solution, a été publié (voir W. SIERPINSKI, *250 Problèmes de théorie élémentaire des nombres* (Hachette-1972), exercice 5/192, p.131, ainsi que les solutions du Concours Général et des Olympiades 1990, publiées aux éditions du Choix).

Remarques :

1- Pour qu'il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tous impairs, vérifiant $1 = \frac{1}{x_1^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}$,

il faut et il suffit que $n \equiv 1 \pmod 8$.

En effet, réduisons au même dénominateur : celui-ci est le carré d'un nombre impair, donc congru à 1 modulo 8 ; le numérateur est une somme de n carrés de nombres impairs, tous congrus à 1 modulo 8.

Par ailleurs, la condition est suffisante car $\forall\, k \in \mathbf{N},\ 1 = \left(8 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{9^i}\right) + \frac{1}{9^k}$.

2 - Si les x_i (vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = 1$) ne sont pas tous impairs, au moins quatre d'entre eux sont pairs.

Supposons $x_1 \dots x_q$ pairs et $x_{q+1} \dots x_n$ impairs.

$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{x_i^2}$ et $\sum_{i=q+1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$, une fois simplifiés, ont même dénominateur : comme la première somme a pour dénominateur commun le carré d'un nombre pair, elle est simplifiable par 4 ; mais son numérateur est une somme de carrés dont l'un au moins est impair, il n'est divisible par 4 que si le nombre de carrés impairs est multiple de 4.

3- Jean THEOCLISTE (Valence) demande à quelle condition il existe une seule décomposition.
Réponse : pour $n \in \{1, 4, 6, 7\}$.
L'existence de plusieurs décompositions pour $n = 8$ suffit à trouver plusieurs décompositions pour $n + 7$ à partir d'une décomposition quelconque pour n, et les cas $n \in \{9, 10, 12\}$ se vérifient aisément à la main.

ÉNONCÉ N°189 (Olympiades Internationales - 1990)

Quels sont tous les entiers n tels que n^2 divise $2^n + 1$?

SOLUTION d'Etienne MARACHE (Barcelonnette).

On remarque d'abord qu'aucun nombre pair n'est solution. Posons $n=2k+1$. On a alors $2^n + 1 = 2.4^k + 1 \equiv 0[3]$: $2^n + 1$ est divisible par 3 lorsque n est impair. Soit $v_3(n)$ l'exposant de 3 dans la décomposition en facteurs premiers de n.

Lemme : Quel que soit l'entier impair n, $v_3(2^n + 1) = v_3(n) + 1$ (1)
où $v_3(n)$ désigne l'exposant de 3 dans la décomposition en facteurs premiers de n.
Démontrons le lemme par récurrence sur $\alpha = v_3(n)$.
Si $\alpha = 0$ $n = 6k + 1$ ou $n = 6k + 5$
si $n = 6k + 1$ $2^n + 1 = 2.(64)^k + 1 \equiv 3[9]$
si $n = 6k + 5$ $2^n + 1 = 32.(64)^k + 1 \equiv 6[9]$
donc, dans les deux cas $v_3(2^n + 1) = 1$.

Soit $\alpha > 0$, supposons (1) vérifiée pour tout n tel que $v_3(n) = \alpha - 1$.
Si $v_3(n)=\alpha$, posons $n=3m$. On a donc $v_3(m)=\alpha-1$ et $v_3(2^m+1)=\alpha$.
Ecrivons
$$2^n + 1 = 2^{3m} + 1 = (2^m + 1)(2^{2m} - 2^m + 1)$$
$$= (2^m + 1)\ ((2^m + 1)^2 - 3(2^m + 1) + 3)$$
Comme $(2^m + 1)^2 - 3(2^m + 1) + 3 \equiv 3[9]$,
on a $v_3(2^n + 1) = v_3(2^m + 1) + 1 = \alpha + 1 = v_3(n) + 1$
ce qui achève la démonstration du lemme.

Si n^2 divise $2^n + 1$ et si $v_3(n) = \alpha$ alors $3^{2\alpha}$ divise n^2 et donc $2^n + 1$ et on a $2\alpha \leq \alpha + 1$ d'où $\alpha \leq 1$.

On remarque que $1^2 = 1$ divise $2^1 + 1 = 3$
et que $3^2 = 9$ divise $2^3 + 1 = 9$.

Démontrons par l'absurde que 1 et 3 sont les seules solutions du problème.

Supposons que n soit une solution strictement supérieure à 3. Comme $v_3(n)\leq 1$, n admet au moins un diviseur premier supérieur à 3 ; soit p le plus petit diviseur premier de n plus grand que 3. On a $p \mid n \mid 2^n + 1$.

Comme $2^n \equiv -1\ [p]$ (-1) est une puissance de 2 dans le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
Soit q le plus petit entier naturel tel que $2^q \equiv -1\ [p]$.
$2q$ est l'ordre de 2 dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ donc $2q$ divise $p - 1$ (petit théorème de Fermat et définition de q) et $2^n \equiv 2^q\ [p]$ entraîne $n = q + 2kq \qquad (k \in \mathbf{N})$.

Il résulte de ce qui précède que q est un diviseur de n inférieur à p donc, vu les hypothèses que $q = 1$ ou $q = 3$.

Si $q = 1$ $\quad 2 \equiv -1[p]$ $\quad$ d'où $p = 3$ $\quad$ c'est impossible.
Si $q = 3$ $\quad 2^3 \equiv -1[p]$ $\quad$ soit $9 \equiv 0[p]$ $\quad$ c'est encore impossible.

La démonstration est terminée.
1 et 3 sont les seuls entiers n tels que n^2 divise $2^n + 1$.

Les éléments de la solution sont pris dans les deux références suivantes :

SIERPINSKI : *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*, problèmes n° 1/9, 1/20 et 1/21 (dans le même ouvrage figure l'énoncé n°188 : exercice 5/192).
BULLETIN N°366 : *Solution de l'énoncé n°135 et compléments.*

Autres solutions :
Luc BARRIA (Serres Morlaas), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Gilbert ROUX (L'Haÿ les Roses), Pierre SAMUEL (Hossegor).
Une solution fausse et deux solutions publiées dans *Mathématiques et Pédagogie n°80* (Claudine FESTRAETS) et dans le corrigé des Olympiades 1990 (R.CUCULIERE).

Solutions tardives :
n° 179 : Gilbert ROUX ; n°186 : Marie-Nicole GRAS.