Calcul formel sur micro-ordinateur et enseignement des Mathématiques au Lycée

Georges Mounier
IREM de Lyon.
Jean-Michel Védrine
Université Jean Monnet - Saint Etienne

Après un bref historique du développement des systèmes de calcul formel sur ordinateur, l'article présente quelques logiciels disponibles sur micro-ordinateur. Sont ensuite examinées les utilisations possibles de ces outils dans l'enseignement des mathématiques au lycée.

1 - Les systèmes de calcul formel.

1.1- Historique

Si la capacité des ordinateurs à traiter de façon efficace et rapide des calculs numériques est bien connue, on sait moins souvent qu'ils peuvent tout aussi bien travailler sur des symboles et exécuter ainsi les algorithmes de l'algèbre ou de l'arithmétique.

Pourtant, les premiers calculateurs formels sont apparus dès le début des années 60, pour servir d'outils dans des domaines comme la physique théorique, l'astronomie, la mécanique ou les mathématiques.

Aujourd'hui, près de soixante systèmes de calcul formel (S.C.F.) sont recensés. Quelques-uns sont très spécialisés : manipulation de tenseurs, physique des hautes énergies, relativité générale [PAVELLE]. D'autres, plus généraux, comme Macsyma, Reduce ou S.M.P. offrent une vaste gamme de traitements mathématiques comme les résolutions d'équations ou de systèmes d'équations, (y compris différentielles), la dérivation, l'intégration, la manipulation de séries, le calcul matriciel ... et sont utilisés par de nombreux chercheurs dans des domaines variés comme, pour nous limiter aux mathématiques, la géométrie algébrique ou la théorie des nombres.

Et la recherche se poursuit pour améliorer les systèmes classiques, en développant d'autres algorithmes plus performants ou en inventant des algorithmes pour des classes de problèmes pour lesquelles il n'en existait pas.

(*) DERIVE est un produit de Soft Warehouse, Inc 3615 Harding Avenue, Suite 505 Honolulu, Hawaii 96816-3735 U-S-A.

1.2- DERIVE

DERIVE (*) est sans doute le logiciel de calcul formel le plus accessible en lycée, parce qu'il fonctionne sur les compatibles PC de base dont sont dotés la plupart des établissements (pour un aperçu des autres S.C.F. sur micro-ordinateurs, voir le paragraphe 2.5).

DERIVE a été conçu par D.Stoutemeyer ET A.Rich comme le successeur de µMATH qui avait fait leur célébrité (pour une présentation de µMATH, voir [MEYER] ou [MOUNIER]), il garde la puissance de ce dernier mais dispose en plus d'une interface de type WORD ou MULTIPLAN qui en rend l'apprentissage plus rapide et l'usage plus souple. Il conserve partiellement (version 2 seulement) l'accès à la programmation qui était un des atouts de µMATH.

Donnons un aperçu des calculs formels qu'effectue DERIVE (voir les annexes pour des exemples de session):
- le calcul sur les entiers et sur les rationnels en précision illimitée ;
- le calcul sur les polynômes à une ou plusieurs variables : développement, factorisation ;
- la résolution d'équations et de systèmes d'équations ;
- l'analyse élémentaire (le Calculus américain) : dérivation, intégration, calcul de limites ;
- le calcul matriciel.

Avec DERIVE, on a aussi accès à des traitements qui ne sont pas du calcul formel, mais qu'il est bien agréable d'avoir à sa disposition, sans changer de logiciel :
- calcul approché de rationnels ou d'irrationnels ;
- représentations graphiques de courbes définies par des coordonnées cartésiennes, paramétriques ou polaires ;
- répresentations graphiques de surfaces définies par une fonction de deux variables.

1.3- MATHEMATICA

MATHEMATICA est disponible sur une large gamme de matériels, du Macintosh (2 Mo de mémoire vive, coprocesseur recommandé) aux compatibles PC (286 ou 386, coprocesseur recommandé, une version sous Windows 3 dotée d'une interface graphique comparable à la version Macintosh est annoncée) en passant par la plupart des stations de travail (SUN, Next, IBM RS6000, Apollo, ...), sans oublier les «gros» ordinateurs. Il faut à ce propos signaler une possibilité intéressante : en réseau, une machine plus puissante peut se charger de tous les calculs (le «noyau» du logiciel tournant sur cette machine) et les postes de travail peuvent alors être des compatibles PC ou des Macintosh de configuration plus légère que la configuration normalement requise.

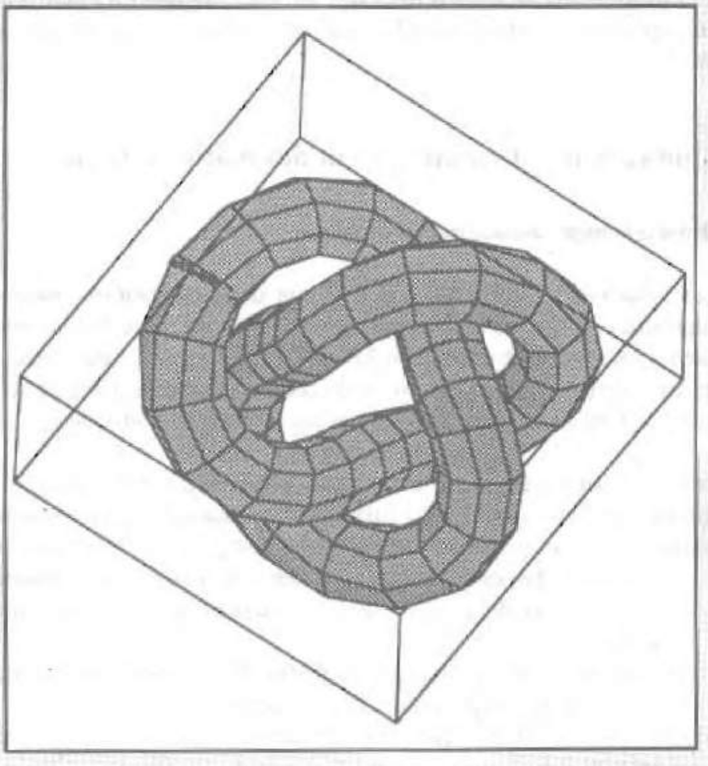
Les points forts forts de Mathematica, outre les traitements déjà évoqués pour DERIVE sont :

VISUALISATION D'UN NŒUD SOUS FORME DE "BOUDIN"

```
<<ParametricPlot3D.m
a=1.0
b=0.4
c=0.5
d=0.3
r[t_] := a + b Cos[1.5 t]
z[t_] := c Sin[1.5 t]
x[t_] := r[t] Cos[t]
y[t_] := r[t] Sin[t]
qqx[t_] :=
-((1.+0.3*Cos[1.5*t])*Sin[t])-0.45*Cos[t]*
Sin[1.5*t
qqy[t_] :=
Cos[t]*(1.+0.3*Cos[1.5*t]) - 0.45*Sin[t]*Sin[1.5*t
qqz[t_] := 0.75*Cos[1.5*t]

norm[t_] := Sqrt[qqx[t]^2 + qqy[t]^2 + qqz[t]^2]

qx[t_] := qqx[t]/norm[t]
qy[t_] := qqy[t]/norm[t]
qz[t_] := qqz[t]/norm[t]

normv[t_] := Sqrt[qx[t]^2 + qy[t]^2]

vx[t_] := qy[t]/norm[t]
vy[t_] := -qx[t]/normv[t]

wx[t_] := -qz[t] vy[t]
wy[t_] := qz[t] vx[t]
wz[t_] := qx[t] vy[t] - vx[t] qy[t]

xx[t_, u_] := x[t] + d (vx[t] Cos[u] + wx[t]
Sin[u])
yy[t_, u_] := y[t] + d (vy[t] Cos[u] + wy[t]
Sin[u])
zz[t_, u_] := z[t] + d (wz[t] Sin[u])
```

VISUALISATION D'UN NŒUD SOUS FORME DE "BOUDIN"

```
ParametricPlot3D[
{xx[m, n], yy[m, n], zz[m, n]},
{m, 0, 4 Pi + 0.31, 0.3},
{n, 0, 2 Pi, Pi/4},
ViewPoint → {20,30,-70}]
```



Dessin obtenu avec MATHEMATICA

- la qualité des graphiques fournis tant pour les tracés de courbes que pour les représentations de surfaces et de volumes ;
- la possibilité de présenter les documents sous forme de «cahiers» comprenant à la fois des commentaires, et les entrées et sorties des calculs effectués. On peut ainsi concevoir de véritables «cours interactifs».
- enfin et surtout, la programmation (voir [MAEDER]) dans un langage puissant et complet (inspiré du C qui est aussi le langage qui a servi à créer Mathematica, mais comportant de nombreuses extensions dont l'utilisation de listes). Des bibliothèques de sous-programmes ont déjà vu le jour dans divers domaines des mathématiques et ce mouvement va sans doute encore s'amplifier.
- des possibilités de liens avec d'autres logiciels (au moins pour le moment sur les systèmes multitâches comme UNIX) qui permettent ainsi à un autres programme de «soumettre» des calculs à effectuer à Mathematica et de récupérer les résultats (voir 2.1 pour une utilisation de ce type de lien en E.A.O.).

2- Applications à l'enseignement des mathématiques.

2.1- Enseignement assisté par ordinateur.

Les systèmes traditionnels d'E.A.O. ont deux limitations essentielles : leur contenu est figé car le programme incapable de résoudre lui-même les problèmes qu'il pose, doit contenir la totalité des énoncés à transmettre, leur organisation est figée car l'ensemble du comportement du système face aux réponses de l'élève est programmé à l'avance, une fois pour toutes.

Les nouveaux systèmes d'E.A.O., ou plutôt d'E.I.A.O. (enseignement intelligent - ou intelligemment - assisté par ordinateur), s'affranchissent de ces limitations en adoptant une structure plus complexe, en trois modules :

- le module Expert qui est expert dans le domaine de connaisances concerné et dont le rôle est de résoudre les questions posées à l'élève;
- le module Elève qui traduit l'expertise dans le domaine pédagogique et qui suit le comportement de l'apprenant ;
- et enfin le Tuteur qui est l'interface avec l'élève et qui conseille celui-ci.

Quoi de plus naturel pour constituer le module expert que d'utiliser un système de calcul formel! C'est comme cela en tout cas que les logiciels DERIVE ET INTEGRALE (*) ont été écrits : en utilisant le S.C.F. MUMATH (voir en annexe 1 une présentation de ces deux logiciels).

Les Logiciels DERIVE et INTEGRALE sont édités par les éditions PROFIL et peuvent être achetés à la CAMIF.

2.2- Enseignement de l'analyse.

L'enseignement de l'analyse au lycée, et dans le premier cycle de l'enseignement supérieur, devant la disponibilité de plus en plus grande des outils informatiques de calcul - calcul numérique, traceurs, calcul formel -, ne pourra pas ne pas changer. C'est en tout cas ce que prévoit M.Dacunha Castelle dans son rapport [Dacunha-Castelle] : *«Le développement très rapide de l'informatique a révolutionné les mathématiques appliquées. Il faut se préparer à ce qu'il modifie demain l'enseignement des mathématiques en profondeur»*.

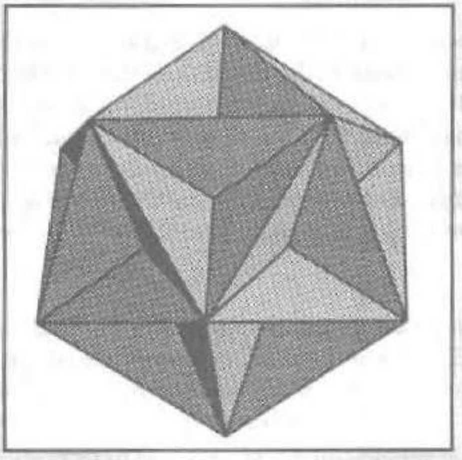
Avant de voir ce qui pourrait changer, laissons à un américain, Kenneth D. LANE [LANE], le soin de faire l'analyse de la situation actuelle.
«Les étudiants pensent souvent que la substance réelle du cours d'analyse est le calcul de dérivées, d'intégrales, de séries ou l'une quelconque des autres activités de manipulation algébrique. Les essais faits pour les amener à se centrer sur l'analyse et la synthèse ratent le plus souvent. Si l'enseignant essaie de centrer son cours sur les principes de l'analyse, il est perçu comme planant sans espoir dans les sphères d'une abstraction inutile ou dispensant une garniture hors sujet "après tout, nous voulons seulement la réponse...".
Que tant de nos étudiants aient cette attitude ne devrait pas nous surprendre. Regardez les exercices quotidiens et les questions d'examen, c'est à dire ce que les étudiants en fin de compte utilisent, pour mesurer l'importance relative des différents contenus d'un cours».

A Colby College, un établissement d'enseignement supérieur de l'état du Maine aux Etats Unis, poussés par une grande déception face au traditionnel cours d'analyse, les enseignants ont en 1984 entièrement réorganisé les enseignements mathématiques en y intégrant l'utilisation d'un système de calcul formel.

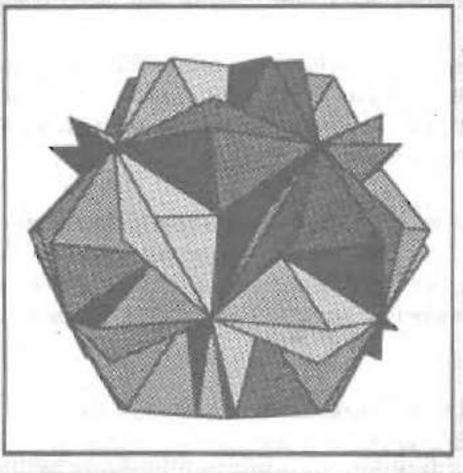
Selon eux, la mise à disposition des élèves d'un S.C.F. permet de passer plus de temps dans la classe à comprendre, mettre en œuvre, les processus fondamentaux en analyse : approximation, transformation, comparaison. En

STELLATIONS D'UN ICOSAEDRE

```
<<Polyhedra.m
Polyhedron[ Icosahedron]
Show[Stellate[%, /Sqrt[2.0]], Boxed →False]
```



```
Show[Stellate[%, 1.5]]
```



Dessins obtenus avec MATHEMATICA

effet, si les élèves peuvent utiliser un S.C.F., le temps habituellement passé à l'entraînement aux techniques de calcul, comme l'intégration, est grandement réduit. De plus, libéré des calculs par l'outil informatique, pouvant faire suffisamment d'essais complets et réussis, l'étudiant peut appréhender le paysage dans son entier et apercevoir, maintenant qu'il n'est plus caché par la forêt des confusions à propos des manipulations algébriques, le but poursuivi.

Le type même des exercices proposés à l'élève assisté d'un S.C.F. doit changer : ils peuvent être plus compliqués, plus proches des problèmes réels. Par exemple les fonctions à étudier ne sont plus obligatoirement choisies pour la facilité avec laquelle on peut trouver le signe de leur dérivée (voir en annexe 2 deux exemples de ces nouveaux exercices).

2.3- Aide à la découverte

La façon la plus immédiate d'utiliser un S.C.F., mais non la moins passionnante, est de s'en servir pour motiver les élèves à exercer leurs capacités de découverte, de recherche.

Selon David R.STOUTEMEYER [STOUTEMEYER], un des créateurs de µMATH : *«Les systèmes de calcul symbolique sur ordinateur permettent maintenant des traitements si rapides et si impeccables d'exemples non triviaux, qu'il devient facile de chercher des modèles qui puissent suggérer des conjectures ou des généralisations, puis de chercher des contre-exemples ou des preuves assistées par ordinateur. Par leur capacité de traiter rapidement des exercices qui étaient impraticables à la main, ces systèmes nous permettent d'aller à l'aventure plus profondément et plus loin, en suivant notre curiosité attirée par des particularités du paysage que seuls de vastes exemples révèlent»*.

Un groupe de recherche de l'I.R.E.M. de Lyon travaille dans cette voie et a pris pour hypothèse que l'utilisation d'un logiciel de calcul formel dans la recherche de problèmes, en libérant les élèves des activités de calcul (dévolues au logiciel) devrait permettre à l'élève de centrer son activité sur la stratégie de recherche et en particulier :

- utiliser puis s'approprier une gamme d'heuristiques variées : essais ordonnés, recherche de régularités, fabrication de contre-exemples ...
- mettre en place un meilleur contrôle de la recherche : organisation de vérifications, retours en arrière ...

- garder comme guide de la recherche le but du problème posé.
Voir en annexe quelques exemples de problèmes à chercher avec l'assistance d'un système de calcul formel.

2.4- Sauront-ils encore calculer ?

Les élèves qui suivront des cours d'analyse rénovés, avec Système de Calcul Formel, sauront-ils encore calculer (des dérivées ou des primitives par exemple) ? On ne peut éviter de se poser la question.

Le texte du Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques [GREM] pose bien le problème :
«Quelle est la place des compétences techniques parmi l'ensemble des compétences nécessaires en mathématiques, quel équilibre peut être réalisé ? Dans quelle mesure est-il nécessaire que l'élève sache faire ce que la machine fait ? L'expérience semble montrer d'une part que pour utiliser efficacement la machine, il est bon d'avoir compris ce qu'elle fait, et d'autre part que le fait de pouvoir transférer une part de l'activité à la machine permet d'enrichir le champ des problèmes que l'on peut résoudre, et permet à l'élève de se consacrer aux autres compétences nécessaires».

2.5- Les outils.

Les systèmes de calcul formel aujourd'hui disponibles sont-ils réellement faits pour une utilisation en classe ?

Pour les plus grands : Macsyma, Reduce (*)... la réponse est évidemment non, ils ont été conçus pour la recherche et de toutes façons il est peu probable qu'un lycée puisse s'équiper pour pouvoir les utiliser.

(*) Une version de REDUCE pour compatibles PC est signalée dans les Actes de la première Université d'été d'Intelligence Artificielle et Enseignement des Mathématiques édités par l'I.R.E.M. de Toulouse.

MATHEMATICA, à condition de disposer du matériel nécessaire pour le faire tourner, offre à l'utilisateur toutes les facilités de manipulation qui ont fait le succès du Macintosh : sélection avec la souris, couper/coller...

Sur compatible PC, l'évolution de µMATH à DERIVE va dans le sens d'une plus grande souplesse d'utilisation, en effet, DERIVE :
- fonctionne avec un système de menu classique ;
- affiche les expressions mathématiques en deux dimensions ;

- permet de réutiliser tout ou partie d'une expression ;
- offre le choix entre calcul exact ou approché ;
- permet de se limiter au calcul dans l'ensemble des réels.

Pour effectuer un calcul, un S.F.C. ne s'y prend pas toujours comme l'élève (par exemple µMATH utilise la règle de l'Hospital pour ramener la limite de U/V à celle de U'/V' en cas d'indétermination), ni même comme le mathématicien, et cela peut poser problème si on n'attend pas du logiciel seulement la réponse mais aussi une information sur la méthode utilisée.

Les techniques de l'Intelligence Artificielle permettront sans doute aux S.C.F. de l'avenir de répondre à cette critique, puisque selon Jacques Calmet [CALMET], ils devraient offrir :
«- *l'implémentation d'autant de méthodes que possible pour résoudre un même problème ;*
- *l'extension du champ des problèmes résolubles. Aujourd'hui, seules les méthodes constructives sont implémentées, il faudrait contourner cette limitation en utilisant, lorsqu'elles sont les seules possibles, des méthodes heuristiques. Cela suppose d'utiliser certaines techniques de l'I.A.*
- *pour pouvoir être utiles ces extensions nécessitent une amélioration de la communication entre l'utilisateur et le système. Sur demande de sa part, l'utilisateur devrait pouvoir : obtenir des informations sur la méthode utilisée pour un calcul donné, sélectionner une méthode alternative, accéder à une documentation en ligne sur ces méthodes…*»

3 - Calcul formel et formation des maîtres.

A partir de mon expérience personnelle de formateur à l'I.R.E.M. de Lyon, et d'échanges très stimulants pendant les journées de calcul formel d'Avignon, en Novembre 1990 (*), j'ai acquis la conviction qu'une initiation au calcul formel, et en particulier la pratique d'un outil de calcul formel sur micro-ordinateur, serait une composante fort utile de la formation (initiale et continue) des enseignants de Mathématiques.

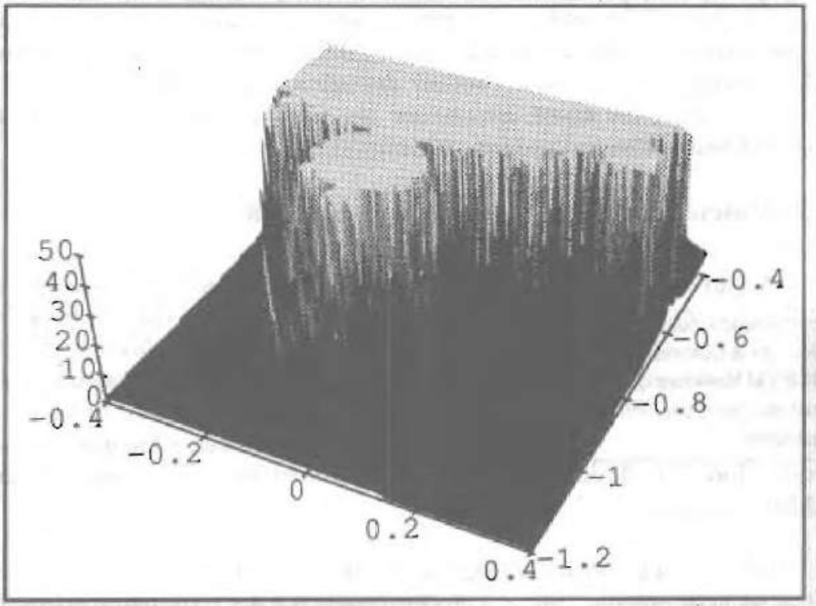
(*) Compte rendu publié dans le bulletin de la Commission INTER-IREM Mathématiques et Informatique (édité par l'IREM de Toulouse).

En effet, la pratique d'un logiciel de calcul formel, et la réflexion collective sur cette pratique, amène à prendre conscience des conventions habituellement implicites dans l'écriture mathématique des expressions et des diffi-

Visualisation de l'Ensemble de MandelBrot en 3 dimensions.

Le nombre d'itérations est visualisé sur l'axe des z.

```
iter[x_,y_,lim_] := Block[{c, z, ct},
                    c = x + I y;
                    z = c;
                    ct = 0;
                    While[(Abs[z]<2.0) && (ct<lim),
                          ++ct;
                          z = z*z + c;
                    Return[ct];
                    ]
Plot[iter[x,y,50], {x, -0.4, 0.4}, {y, -1.2, -0.4},
     PlotPoints →120, Mesh →False, PlotRange →
     {(Boxed Æ False]
```



Dessin obtenu avec MATHEMATICA

cultés que leur maîtrise peut poser à de non spécialistes.

Lorsque je présentais µMATH à des enseignants de mathématiques, j'expliquais que le signe « * » pouvait le plus souvent être sous entendu lors de l'entrée d'une expression et tout allait bien jusqu'à ce qu'un des participants écrive «a(x + 1)» et s'irrite de voir que µMATH ne comprenait pas. Je devais alors expliquer que des deux interprétations possibles :

« a multiplié par (x + 1)» et «image de (x + 1) par a»

µMATH choisissait la deuxième. Une fois dépassée l'irritation de ne pas être compris par le logiciel, la plupart des enseignants voulaient bien admettre que l'écriture «a(x + 1)» peut être comprise de plusieurs façons par le système de calcul formel ou par l'élève.

Utiliser un système de calcul formel peut aussi aider à prendre du recul par rapport à certaines pratiques rituelles dont le sens s'est quelquefois perdu.

µMATH savait résoudre (formellement) certaines équations du second degré, ou même du troisième, mais il décevait beaucoup les enseignants qui lui demandaient de résoudre :

$$X^3 - 6X^2 - 6 = 0.$$

Il trouvait les racines sous une forme extrêmement compliquée alors que les enseignants avaient construit l'équation en développant (X-1)(X-2)(X-3). Comment était-il possible qu'«il» ne voie pas que 1 était racine évidente ? J'expliquais qu'il appliquait des formules de résolution, qu'il tentait ensuite de simplifier les expressions qu'il avait obtenues pour les racines et qu'il échouait.

Après une discussion animée sur l'importance de la recherche des racines évidentes, et après s'être mis d'accord sur la définition de l'«évidence» d'une racine, on finissait par écrire un module de recherche des racines évidentes pour compléter µMATH.

4 - Evaluation.

Les calculatrices programmables (ou micros de poche) permises au baccalauréat intègrent de plus en plus d'algorithmes de calcul formel : les opérations sur les fractions sur beaucoup de modèles, le calcul sur les polynômes et la dérivation formelle pour les modèles haut de gamme (Hewlett Packard 28, 48 et 95). Et puis beaucoup d'élèves se confectionnent (ou recopient) de petits programmes de calcul formel qu'ils installent sur leur machine : résolution d'équations, division des polynômes, calculs sur les nombres complexes...

Face à cette évolution, l'enseignant ne doit pas mener un combat d'arrière garde qui consisterait, à chaque évolution dans les outils de calcul, à se rabattre sur de nouveaux algorithmes non encore automatisés (sur les machines accessibles aux élèves). Il devrait savoir que l'évolution des moyens de calculs est inéluctable : la table de logarithmes et la règle à calcul ne sont plus utilisées, et s'il a eu l'occasion d'utiliser un S.C.F., il sait aussi que non seulement le calcul numérique, mais même le calcul formel, peut être automatisé.

Pour autant l'enseignant de mathématiques ne peut éviter la question de l'évaluation, et en particulier celle des examens. Pour le G.R.E.M. [GREM], *«il est certain que l'usage des calculatrices enlève une grande partie de l'intérêt des sujets "classiques", ceux où l'on étudie une fonction par ses variations puis où on demande comme production finale le tracé de la représentation graphique, et, pour les meilleurs de calculer l'aire sous la courbe...»*
Que reste-t-il en effet d'un sujet de baccalauréat série B ou D si l'élève peut utiliser DERIVE : jugez en en lisant l'annexe 4 .

Il faudra donc renouveler une partie (importante) des sujets de baccalauréats, en se gardant [GREM] *«de vouloir compenser l'apparition des calculatrices en augmentant la complexité des sujets ! Repensons plutôt les compétences à évaluer. Considérons que savoir utiliser intelligemment une calculatrice est une compétence fort utile maintenant et qu'il est juste de récompenser. Et si l'on veut tester la mémoire, faisons le par des procédés spécifiques!»*

Reste un problème préoccupant : comment empêcher une trop grande inégalité entre les élèves ? Là, le G.R.E.M. est bien timide, puisqu'il se contente d'*«envisager de fournir avec les sujets les formules, que certains auraient pu enregistrer dans leur machine»*. Mais que proposer d'autre : le prêt annuel de machines par les établissements ou les associations de parents d'élèves?

BIBLIOGRAPHIE

[CALMET]
Jacques Calmet - *Introducing computing algebra to users and students.* Supporting papers du symposium de la C.I.E.M. de Strasbourg - Mars 1985. The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching.

[DACUNHA CASTELLE]
Didier Dacunha Castelle - *Rapport de mission sur l'enseignement des mathématiques* - juin 1989.

[DAVENPORT]
J.Davenport, Y.Siret, E.Tournier - *Calcul formel et algorithmes de manipulations algébriques* - MASSON

> Les systèmes présentés sont principalement MACSYMA et REDUCE, les algorithmes étudiés, par exemple calcul sur les polynômes, intégration, nécessitent un assez bon niveau mathématique.

[GREM]
Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques - *Calculatrices et ordinateurs dans l'enseignement des mathématiques au lycée* - STNT n°40 (Bulletin de l'IREM de Lyon et de la régionale de l'APMEP).

[JUGE]
Guy Juge et Georges Mounier - *Atelier DERIVE* - dans les Actes de l'Université d'été Informatique et enseignement de la géométrie - I.R.E.M. de Toulouse.

[LANE]
Kenneth D.Lane - *Symbolic manipulators and the teaching of college mathematics : some possible consequences and opportunities.*
Supporting papers du Symposium de la C.I.E.M. - Strasbourg - Mars 1985. The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching.

> Décrit une expérience menée à Colby College U.S.A. d'intégration de S.C.F. dans un enseignement d'analyse.

[MAEDER]
Roman E.Maeder - *Programming in mathematics* - ADDISON WESLEY.

[MEYER]
Etienne Meyer - *Faire des maths avec Mumath* - I.R.E.M. de Strasbourg.

[MOUNIER]
Georges Mounier - *Calcul symbolique sur micro-ordinateur et enseignement des mathématiques* - Bulletin de liaison N°1 de la commission Inter-Irem Mathématiques et Intelligence artificielle.

[PAVELLE]
Richard Pavelle, Michael Rothstein, John Fitch - *L'algèbre informatique - L'intelligence de l'informatique* - Pour la Science - BELIN.

Une présentation et un historique des systèmes de calcul formel et de leurs applications.

[STOUTEMEYER]
David R.Stoutemeyer - *Using computer math for learning by discovery.* Supporting papers du symposium de la C.I.E.M. de Strasbourg - Mars 1985 - The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching.

Par un des créateurs de µMATH, quelques scénarions d'utilisation de µMATH pour encourager la découverte en favorisant l'expérimentation

[WOLFRAM]
Stephan Wolfram - *Mathematica a system for doing Mathematics by computer* - ADDISON WESLEY.

ANNEXE 1

Un logiciel d'E.I.A.O. : DERIVEE

Le logiciel DERIVEE se propose d'aider l'élève dans la résolution d'exercices de dérivation. Ecrit à l'aide du système de calcul formel µMATH, il «sait» dériver toute fonction (du programme de lycée) et peut ainsi expliquer à l'élève les exercices que celui-ci lui fournit.

Voici un exemple de dialogue avec le logiciel

(ce qui est tapé par l'élève est en italique. Lorsqu'il ne sait pas, l'élève tape "?" pour avoir des explications).

Quelle est la dérivée de f(x) = *(2x - 3)/(x + 1)* f ' (x) = *?*

→ Quelle est la dérivée de f = u/v ?
f ' = *(u' v - uv')/v^2*
C'est exact.

... appuyez sur une touche pour passer à la suite ...

Quelle est la dérivée de u(x) = 2x - 3 ?
u'(x) = *2*
C'est exact.

... appuyez sur une touche pour passer à la suite ...

Quelle est la dérivée de v(x) = x + 1 ?
v'(x) = *1*
C'est exact.

... appuyez sur une touche pour passer à la suite ...

En conclusion, f(x) = u(x)/v(x)
la dérivée de u(x) = 2x - 3 est u'(x) = 2
la dérivée de v(x) = x + 1 est v'(x) = 1

ainsi ...

Quelle est la dérivée de f(x) = (2x - 3)(x + 1) ?
f '(x) = *5 / (x + 1)^2*
C'est exact.

ANNEXE 2

Enseignement rénové de l'analyse : deux exemples d'exercices.

Exercice 1 (adapté de [LANE]).

Calculer, en utilisant le théorème Taylor, une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{5}$.

Nous utilisons la fonction f : $X \to \sqrt{X}$ sur l'intervalle [4 ; 5].
La clé de l'exercice est le calcul du reste de Lagrange :

$$R_n(c) = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)\,!}$$

Nous devons calculer les dérivées successives de f et estimer leur valeur pour c compris entre 4 et 5. C'est le cœur de l'exercice pour [LANE] :
«Le but réel dans l'enseignement du théorème de Taylor est d'apprendre à estimer, dans l'enseignement classique, ce but est rarement atteint parce que l'élève rencontre trop d'obstacles avant d'arriver à cette étape de l'exercice».

Exemple de session avec DERIVE :

En premier la question posée (numéro impair),
en dessous, la réponse du logiciel (numéro pair).

1: $F(x) := x^{1/2}$

Commençons par calculer le reste si n = 2.

3: $\left[\frac{d}{dx}\right]^3 F(x)$

4: $\frac{3}{8x^{5/2}}$

Pour c dans l'intervalle [4 ; 5], on obtient une majoration du reste en remplaçant c par 4.

Donc, remplaçons c par 4 et divisons par 3!.

6: $\frac{3}{8.4^{5/2}} / 3!$

8: $\frac{1}{512}$

Le reste est trop grand (supérieur à 10^{-3}) , essayons n = 3.

9: $\left[\frac{d}{dx}\right]^4 F(x)$

10: $-\frac{15}{16x^{7/2}}$

Remplaçons c par 4 et divisons par 4!.

12: $-\frac{15}{16\ 4^{7/2}} / 4!$

14: $-\frac{5}{16384}$

Cette fois, le reste est inférieur à 10^{-3}, l'approximation polynomiale de degré 3 convient, calculons-la.

15: TAYLOR (F(x),x,4,3)

16: $\frac{x^3}{512} - \frac{5x^2}{128} + \frac{15x}{32} + \frac{5}{8}$

Et on obtient pour $\sqrt{5}$:

18: $\frac{5^3}{512} - \frac{5\ 5^2}{128} + \frac{15\ 5}{32} + \frac{5}{8}$

Soit, en réduisant au même dénominateur :

20: $\frac{1145}{512}$

Et, en effectuant la division, on obtient :

22 : 2.23632 (avec 6 décimales par exemple)

D'où une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près : 2.236.

Exercice 2.

Déterminer une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

Etude sommaire (pour en savoir plus, voir par exemple la brochure Inter-Irem Activités en première - 1986).
$X^2 - 2 = 0$ s'écrit $(X - 1)(X + 1) = 1$ ou $X = 1 + 1/(1 + X)$. On étudiera donc la suite définie par U_1 et $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{(1 + U_n)}$ qui va nous donner les réduites de $\sqrt{2}$.

Ce que peut apporter un S.C.F. : ici DERIVE.

En premier la question posée (numéro impair), en dessous, la réponse du logiciel (numéro pair).

Définissons la fonction.

1: $F(x) := 1 + \frac{1}{1 + x}$

Puis itérons à partir de 1:

3: F(F(F(F(1))))

4: $\frac{21}{49}$

5: F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(F(1))))))))))))))))

6: $\frac{3880899}{2744210}$

Dont on peut obtenir une valeur approchée :

8: 1.41421356237314199 71

A comparer avec les 20 premières décimales de $\sqrt{2}$.

9: $2^{1/2}$

10: 1.4142135623730950488

Avec la version 2 de DERIVE, c'est encore bien plus simple :

1: $\text{ITERATES}\left[1+\dfrac{1}{1+x}, x, 1, 8\right]$

2: $\left[1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{17}{12}, \dfrac{41}{29}, \dfrac{99}{70}, \dfrac{239}{169}, \dfrac{577}{408}\right]$

3: $\text{ITERATE}\left[1+\dfrac{1}{1+x}, x, 1, 17\right]$

4: $\dfrac{38883899}{2744210}$

ANNEXE 3

Recherche de problèmes assistée par calculateur formel .

Problème 1 :

Par combien de 0 se termine n! ?

Si vous utilisez DERIVE, ou tout autre système de calcul formel, les entiers dont vous disposerez auront un nombre de chiffres non limité (sauf par la mémoire disponible).

Exemple :

1: 40!

2: 815915283247897734345611269596115894272000000000

Vous pourrez ainsi faire de nombreux essais :

n	23	24	25	26	30	50	125
nombre de 0 de n!	4	4	6	6	7	12	31

Et sans doute trouver la réponse au problème.

Problème 2 :

Simplifier la fraction rationnelle : $\dfrac{x^n - 1}{x^p - 1}$

Quelques essais avec DERIVE

En premier, la question posée (numéro impair), en dessous, la réponse du logiciel (numéro pair).

1: $\dfrac{x^8 - 1}{x^{12} - 1}$

2: $\dfrac{x^4 - 1}{x^8 + x^4 + 1}$

3: $\dfrac{x^{21} - 1}{x^{14} - 1}$

4: $\dfrac{x^{14} + x^7 + 1}{x^7 + 1}$

Cette fois, voici le résultat, classique au niveau Bac + 1 :

le PGCD de $(x^n - 1)$ et $(x^p - 1)$ est $(x^{\text{pgcd}(n,p)} - 1)$.

Problème 3 :

Calculer une primitive de $X^n e^X$, pour n entier égal à 0, 1, 2 ... jusqu'à pouvoir conjecturer la forme générale, que vous prouverez ensuite.

Quelques calculs que DERIVE peut faire :

En premier la question posée (numéro impair), en dessous, la réponse du logiciel (numéro pair).

1: $\int x \, \hat{e}^x dx$

2: $(x - 1) \, \hat{e}^x$

3: $\int x^2 \hat{e}^x dx$

4: $(x^2 - 2x + 2) \, \hat{e}^x$

5: $\int x^3 \hat{e}^x dx$

6: $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \, \hat{e}^x$

7: $\int x^4 \hat{e}^x dx$

8: $(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) \, \hat{e}^x$

9: $\int x^5 \hat{e}^x dx$

10: $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) \, \hat{e}^x$

On peut alors conjecturer la forme générale :

$$I_n = \int x^n \hat{e}^x dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_n^k X^{n-k} e^X$$

On a ainsi donné à un exercice classique une forme plus ouverte, laissant plus de place à l'imagination : l'intégration par parties nécessaire pour déterminer une relation de récurrence pour la suite (I_n) apparaît alors comme un moyen de la preuve du résultat conjecturé.

ANNEXE 4

Problème de baccalauréat assisté par DERIVE.

En premier la question (numéro impair),
en dessous, la réponse du logiciel (numéro pair).

Soit à étudier la fonction :

1: $$\frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$$

Recherche de l'asymptote.

2: $$\frac{9}{x - 2} + x - 3$$

Dérivée.

3: $$\frac{d}{dx} \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$$

4: $$\frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2}$$

Les zéros de la dérivée.

5: $$\text{SOLVE}\left[\frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2}, x\right]$$

6: $[x = -1 , x = 5]$

Quelques limites.

7: $$\lim_{x \to 2-} \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$$

8: $-\infty$

9: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$

10: ∞

Une primitive

11 : $\displaystyle\int \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}\, dx$

12: $9\ \mathrm{LN}\,(x - 2) + \dfrac{x^2}{2} - 3x$

Une intégrale définie.

13: $\mathrm{INT}\left[\dfrac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}, x, 4, 5\right]$

14: $9\ \mathrm{LN}(3) - 9\mathrm{LN}(2) + \dfrac{3}{2}$

Et avec une fonction logarithmique ?

21: $G(x) := \dfrac{1 - \mathrm{LN}\left(x^2\right)}{x^2}$

Dérivée.

23: $\dfrac{d}{dx}\, \dfrac{1 - \ln\left(x^2\right)}{x^2}$

24: $\dfrac{2\ \mathrm{LN}\left(x^2\right)}{x^3} - \dfrac{4}{x^3}$

Dérivée seconde.

25: $\left[\dfrac{d}{dx}\right]^2 \dfrac{1 - \mathrm{LN}\left(x^2\right)}{x^2}$

26: $\dfrac{16}{x^4} - \dfrac{6\ \mathrm{LN}\left(x^2\right)}{x^2}$

Calcul d'une valeur de G.

27: G(ê)

28: $-ê^{-2}$