Une modeste introduction à la transformation de Laplace.

Daniel Lazet
Bordeaux

DEUXIEME PARTIE

Cet article dont nous présentons ici la deuxième partie, la première ayant été donnée dans le Bulletin n°382, n'est qu'une modeste introduction à la transformation de Laplace, outil puissant dans la résolution de certains problèmes d'analyse, notamment des problèmes différentiels issus de la physique.

Les notions ici exposées sont traitées avec des moyens tout à fait artisanaux, dans un cadre limité. La transformation de Laplace générale relève de l'intégrale de Lebesgue.

L'essentiel de ce qui suit est directement issu :
-du chapitre 7 de l'ouvrage «The Laplace Transformation» de David Widder (Ed.Princeton University Press) ;
-et du chapitre 4 de l'ouvrage «Advanced engineering mathematics» de Stanley Grossman et William Derrick (Ed.Harper and Row, New York).

6-Le problème de l'inversion de la transformation de Laplace :

Le problème qui se pose est le suivant : si deux fonctions f et g admettent la même transformée de Laplace, ces deux fonctions coïncident-elles ? Cette question intervient notamment dans la résolution des équations différentielles linéaires au moyen de la transformation de Laplace.

La réponse à cette question découlera immédiatement d'un théorème que nous allons démontrer et que l'on peut considérer comme le théorème correspondant pour la transformation de Laplace au théorème bien connu donnant les coefficients d'une série entière au moyen des dérivées de sa somme.

On sait en effet que si sur l'intervalle $]-\delta\ ,\ \delta[$ ($\delta \in \mathbf{R}^{\bullet}_{+}$), on a

$F(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $a_n = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}$

Le théorème que nous allons prouver ici est que sous des hypothèses assez larges, on a : $\lim\limits_{k \to +\infty} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \cdot \left(\dfrac{k}{t}\right)^{k+1} \cdot \hat{f}^{(k)}\left(\dfrac{k}{t}\right) \right] = \dfrac{1}{2}\left(f(t+) + f(t-)\right)$

Rappel : $f(t+) = \lim\limits_{\theta \to t+} f(\theta)$, $f(t-) = \lim\limits_{\theta \to t-} f(\theta)$

Si f est continue sur $]0\ ,\ +\infty[$, on a : $f(t) = 1/2\ (f(t+) + f(t-))$, ainsi les valeurs de f sur $]0\ ,\ +\infty[$ sont obtenues au moyen des dérivées de sa transformée de Laplace $\hat{f}$ Or, précisément on a vu en **1** que le passage du discret au continu remplace a_n pat $f(t)$ et F par $\hat{f}$.

Le théorème annoncé va découler d'une succession de lemmes.

6.1-Des lemmes :

◊ **Lemme 1** : Si on a : $a < a + \eta < b$; si h est une fonction réelle de classe C^2 sur $[a\ ,\ a+\eta]\ b$, si $h'(a) = 0$ et $h''(a) < 0$; et si h est décroissante sur $[a\ ,\ b]$.

$$\text{Alors : } \int_a^b e^{k.h(x)}.dx \underset{k \to +\infty}{\sim} e^{k.h(a)}.\sqrt{\frac{-\pi}{2k.h''(a)}} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

Preuve : Soit ε tel que $0 < \varepsilon < -h''(a)$

Soit δ tel que $0 < \delta < \eta$

$h''(a) - \varepsilon < h''(x) < h''(a) + \varepsilon \; (<0)$ sur $[a\,,\,a+\delta]$

(C'est la continuité de h'' qui justifie l'existence de δ).

→ Posons $I_k = \sqrt{k}.\int_a^b e^{k\,[h(x) - h(a)]}.dx$

$$I_k = \underbrace{\sqrt{k}.\int_a^{a+\delta} e^{k\,[h(x) - h(a)]}.dx}_{I'_k} + \underbrace{\sqrt{k}.\int_{a+\delta}^{b} e^{k\,[h(x) - h(a)]}.dx}_{I''_k}$$

Sur $[a + \delta\,,\,b]$ on a : $h(x) - h(a) \leq h(a + \delta) - h(a)$ car h est décroissante

et : $h(a + \delta) - h(a) < 0$ par choix de ε et δ.

D'où, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad k.[h(x) - h(a)] \leq k.[h(a + \delta) - h(a)] \leq 0$

$$0 \leq e^{k.[h(x) - h(a)]} \leq e^{k.[h(a+\delta) - h(a)]}.$$

Donc $0 \leq I''_k \leq \sqrt{k} \times e^{k[h(a+\delta) - h(a)]} \times (b - a)$

D'où : $\lim\limits_{k \to +\infty} (I''_k) = 0$

→ D'après Taylor-Lagrange (puisque h est de classe C^2), pour tout $x \in [a\,,\,a + \delta]$, il existe $\xi \in [a\,,\,a + \delta]$ tel que $h(x) - h(a) = \dfrac{(x - a)^2}{2}\,.\,h''(\xi)$

(avec ξ fonction de x).

Donc $I'_k = \sqrt{k}\,.\int_a^{a+\delta} e^{k/2(x-a)^2.h''(\xi)}.dx$

D'où :

$$= \sqrt{k}\,.\int_a^{a+\delta} e^{k/2(x-a)^2.(h''(a) - \varepsilon)}\,.dx \leq I'_k \leq \sqrt{k}\,.\int_a^{a+\delta} e^{k/2(x-a)^2.(h''(a) + \varepsilon)}\,.dx$$

Posons $\lambda = -h''(a) + \varepsilon$ et $\mu = -h''(a) - \varepsilon$ (donc $\lambda > 0$ et $\mu > 0$).

Par changement de variable, on obtient :

$$\sqrt{k}.\sqrt{\frac{2}{\lambda k}}.\int_0^{\delta\sqrt{\lambda k/2}} e^{-t^2}.dt \leq I'_k \leq \sqrt{k}.\sqrt{\frac{2}{\mu k}}.\int_0^{\delta\sqrt{\mu k/2}} e^{-t^2}.dt$$

On sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. De cet encadrement de I'_k, il découle :

$$\liminf_{k\to\infty}(I'_k) \quad \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{-\pi}{2(h''(a)-\varepsilon)}}$$

et $$\limsup_{k\to+\infty}(I'_k) \quad \sqrt{\frac{2}{\mu}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{-\pi}{2(h''(a)+\varepsilon}}$$

Et, cela étant vrai quel que soit $\varepsilon \in]0\,,\,-h''(a)[$, on en déduit : $\lim_{k\to+\infty}(I'_k)$ existe et vaut $\sqrt{\frac{-\pi}{2\,h''(a)}}$.

→ Conclusion $\lim_{k\to+\infty}(I_k)$ existe et vaut $\sqrt{\frac{-\pi}{2\,h''(a)}}$ (CQFD)

◊ **Lemme 2 :** Si on a : $a < a+\eta < b$; si h est une fonction réelle de classe C^2 sur $[a\,,\,a+\eta]$;
Si $h'(a) = 0$ et $h''(a) < 0$; si h est décroissante sur $[a\,,\,b]$; et si φ est une fonction réelle réglée sur $[a\,,\,b]$ avec $\varphi(a+) \neq 0$.

Alors $$\int_a^b \varphi(x).e^{k.h(x)}.\,dx \underset{k\to+\infty}{\sim} \varphi(a+).e^{k.h(a)}.\sqrt{\frac{-\pi}{2\,k.h''(a)}}$$

$(k \in \mathbf{N}^*)$

Preuve : Posons $J_k = \sqrt{k}\int_a^b \left[\varphi(x) - \varphi(a+)\right].e^{k[h(x)-h(a)]}\,dx$

→ Si on montre $\lim_{k\to+\infty}(J_k) = 0$, le lemme en découlera ; en effet :

$$\int_a^b \varphi(x).e^{k.h(x)}.dx = \frac{1}{\sqrt{k}}.J_k\, e^{k.h(a)} + \varphi(a+).\int_a^b e^{k.h(x)}.dx.$$

D'après le lemme 1, on peut écrire: $\displaystyle\int_a^b e^{k.h(x)}.\,dx = e^{k.h(a)}.\sqrt{\frac{-\pi}{2\,k.h''(a)}}.\tau_k$

(avec $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}(\tau_k) = 1$)

Donc : $\displaystyle\int_a^b \varphi(x).e^{k.h(x)}.dx = \frac{1}{\sqrt{k}}.J_k e^{k.h(a)} + \varphi(a+).e^{k.h(a)}.\sqrt{\frac{-\pi}{2\,k.h''(a)}}.\tau_k$

$$= \varphi(a+).e^{k.h(a)}.\sqrt{\frac{-\pi}{2\,k.h''(a)}}.\left(\tau_k + \sqrt{\frac{2\,h''(a)}{-\pi}}.\frac{1}{\varphi(a+)}.J_k\right)$$

Ce qui donne bien le résultat annoncé dans le lemme, car

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\tau_k + \sqrt{\frac{2h''(a)}{-\pi}} \times \frac{1}{\varphi(a+)} \times J_k\right) = 1$$

→ Prouvons que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}(J_k) = 0$:

Ecrivons $J_k = J'_k + J''_k$ avec $\displaystyle J'_k = \sqrt{k}.\int_a^{a+\delta}\left[\varphi(x) - \varphi(a+)\right].e^{k.[h(x)-h(a)]}.dx$

et $\displaystyle J''_k = \sqrt{k}.\int_{a+\delta}^b\left[\varphi(x) - \varphi(a+)\right].e^{k.[h(x)-h(a)]}.dx$

En considérant $\displaystyle M = \sup_{[a,b]}(|\varphi(x) - \varphi(a=)|)$, on a $|J''_k| \leq M.I''_k$

(I''_k de la démonstration du lemme 1)

D'où $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}(J''_k) = 0$.

Soit $\varepsilon \in\ ]0\,,\,-h''(a)[$, on lui associe δ comme dans la démonstration du lemme 1.
Pout tout $\delta' \in\ ]0\,,\,\delta[$, on remarque que : $0 \leq I'_k(\delta') \leq I'_k$
(I'_k est l'élément défini dans la démonstration du lemme 1, et $I'_k(\delta')$ est l'intégrale analogue à I'_k mais définie avec δ' au lieu de δ).

Puisque $\lim_{k \to +\infty} (I'_k)$ existe dans **R**, la suite $(I'_k)_{k\in \mathbb{N}}$ est bornée. Donc il existe

$A \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I'_k \leq A.$
D'où : $\forall\ \delta' \in]0\ ,\ \delta[,\ \forall\ k \in \mathbb{N}^*\ ,\ 0 \leq I'_k\ (\delta'\ ) \leq A.$
On peut choisir δ ' tel que $\delta' \in]0\ ,\ \delta[$, et $|\varphi(x) - \varphi(a+)| \leq \varepsilon$ sur $[a, a + \delta]$
De là : $|J'_k\ (\delta'\ ) \leq \varepsilon\, I'_k\ (\delta'\ ) \leq \varepsilon\ .\ A$.
Finalement $|J_k| = |J'_k\ (\delta') + J''(\delta'\ ) \leq \varepsilon A + M.I''_k(\delta'\ )$
On démontre que $\lim_{k \to +\infty} (I''_k\ (\delta\ ')) = 0$ comme pour I''_k dans le lemme 1.

D'où $\lim_{k \to +\infty} (J_k) = 0$ (CQFD).

◊ Par changement de variable $x \to X = -x$, on obtient le résultat symétrique du lemme 2 :

Lemme 2' : Si on a : $a < b - \eta < b$; si h est une fonction réelle de classe C^2 sur $[b - \eta\ ,\ b]$; si $h'(b) = 0$ et $h''(b) < 0$; si h est croissante sur $[a\ ,\ b]$; et si φ est une fonction réglée sur $[a\ ,\ b]$ avec $\varphi(b-) \neq 0$.

$$\text{Alors : } \int_a^b \varphi(x).e^{k.h(x)}.dx \underset{k \to +\infty}{\sim} \varphi(b-).e^{k.h(b)}.\sqrt{\frac{-\pi}{2k.h''(b)}}$$

Lemme 3 : Si φ est une fonction réelle réglée sur $[t, +\infty[$ (avec $t > 0$), et s'il existe $c > 0$ tel que $\int_t^{+\infty} e^{-cx}.\varphi(x).dx$ converge.

$$\text{Alors : } \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \cdot \int_t^{+\infty} e^{-ku/t}.u^k.\varphi(u).du \right) = \frac{1}{2}\ \varphi(t+)$$

Preuve : Soit $\delta > 0$, et $\alpha(x) = \int_{t+\delta}^{x} e^{-cu}.\varphi(u).du$ pour $x \geq t + \delta$.

Puisque : $\int_t^{+\infty} e^{-cu}.\varphi(u).du$ converge, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$\forall x \geq t + \delta,\ |\alpha(x)| \leq M.$
- Par intégration par parties on a :

$$A_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\int_{t+\delta}^{+\infty} e^{-ku/t}.u^k.\varphi(u).\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\left[\alpha(u).g(u)\right]_{t+\delta}^{+\infty} - \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\int_{t+\delta}^{+\infty} \alpha(u).g'(u).\mathrm{d}u$$

en posant $g(u) = u^k.e^{(c-k/t).u}$

On prend dans ce qui suit $k \in \mathbf{N}^*$, $k > c\,t$

On a alors $\lim\limits_{+\infty} g = 0$, et puisque $\alpha(t+\delta) = 0$, on obtient $\left[\alpha(u)\,.\,g(u)\right]_{t+\delta}^{+\infty}$

(α est bornée).

Donc : $A_k = -\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\int_{t+\delta}^{+\infty} \alpha(u).g'(u).\mathrm{d}u$

L'étude des variations de la fonction g donne :

u	0	u_0	$+\infty$
$g(u)$	0 $\nearrow$		$\searrow$ 0

avec $u_0 = \dfrac{k\,t}{k - c\,t}$

$\lim\limits_{k \to +\infty} (u_0) = t$, donc il existe $k_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $k_0 > c\,t$, et, pour tout $k \geq k_0$,

$$u_0 < t + \delta$$

De là, pour tout $k \geq k_0$, sur $[t+\delta\,, +\infty[$, on a : $g(t+\delta) \geq g(u) \geq 0$.

D'où : $\left|\int_{t+\delta}^{+\infty} \alpha(u).g'(u).\mathrm{d}u\right| \leq M.\int_{t+\delta}^{+\infty} |g'(u)|.\mathrm{d}u = -M.\int_{t+\delta}^{+\infty} g'(u).\mathrm{d}u$

$$= M.\left[g(t+\delta) - \lim_{+\infty} g\right]$$

c'est-à-dire : $\left|\int_{t+\delta}^{+\infty} \alpha(u).g'(u).\mathrm{d}u\right| \leq M.g(t+\delta) = M.(t+\delta)^k.e^{(c-k/t)(t+\delta)}$

(avec $k \geq k_0$).

On en déduit : $|A_k| \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.M.(t+\delta)^k.e^{(c-k/t).(t+\delta)} = a_k$.

On a : $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{k+1}.(t+\delta).e^{-1-\delta/t}$

Donc : $\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{1}{t}.e.(t+\delta).e^{-1-\delta/t} = \left(1+\frac{\delta}{t}\right).e^{-\delta/t} < 1$

Ce qui implique : $\lim_{k \to +\infty} (a_k) = 0$ et de là : $\lim_{k \to +\infty} (A_k) = 0$

-Soit $B_k = \frac{1}{k!}.\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\int_t^{t+\delta} e^{-ku/t}.\varphi(u).du$

On va utiliser le lemme 2. Posons $h(x) = \ln(x) - \frac{x}{t}$ (pour $x > t > 0$)

On a : $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{t} < 0$. Donc h décroît sur $[t, t+\delta]$

$h'(t) = 0$, $h''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$.

Le lemme 2 permet donc d'écrire :

$$B_k \underset{k \to +\infty}{\sim} \varphi(t+).e^{k.(\ln t - 1)}.\sqrt{\frac{-\pi}{2k \times (-1/t^2)}}.\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}$$

c'est-à-dire : $$B_k \underset{k \to +\infty}{\sim} \varphi(t+).\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\frac{e^{-k}.k^k.\sqrt{k}}{k!}.$$

D'après la formule de Stirling, on sait que : $\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{k!}{e^{-k}.k^k.\sqrt{k}}\right) = \sqrt{2\pi}$.

Donc : $\lim_{k \to +\infty} (B_k) = \varphi(t+) . \sqrt{\frac{\pi}{2}} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} . \varphi(t+)$

- Conclusion : $\lim_{k \to +\infty} (A_k + B_k) = \frac{1}{2} . \varphi(t+)$ (CQFD).

Lemme 4 : Si φ est une fonction réelle réglée sur $]0, t]$ (avec $t > 0$), et l'intégrale $\int_0^t \varphi(x).dx$ est convergente

alors $\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k!} . \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} . \int_0^t e^{-ku/t}.\varphi(u).du\right) = \frac{1}{2}\varphi(t-)$

Preuve : Soit $\delta \in \,]0\,,t\,[$, et $\alpha(x) = \int_x^{t-\delta} \varphi(u).\mathrm{d}u$ pour $x \in [0\,,t-\delta]$ (en prenant pour $\alpha(0)$ la valeur de $\int_0^{t-\delta} \varphi(u).\mathrm{d}u$ qui est une intégrale convergente). La fonction α est ainsi réglée sur $[0\,,t-\delta]$.
Il existe alors $M \in \mathbf{R}+$ tel que : $\forall x \in [0\,,t-\delta]$, $|\alpha(x)| \leq M$.
Soit $\varepsilon \in \,]0\,,t-\delta[$,
- par intégration par parties, on a :

$$A'_k(\varepsilon) = \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\int_\varepsilon^{t-\delta} e^{-ku/t}.u^k.\varphi(u).\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\left[-\alpha(u).l(u)\right]_\varepsilon^{t-\delta} + \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\int_\varepsilon^{t-\delta} \alpha(u).l'(u).\mathrm{d}u$$

en posant : $l(u) = e^{-ku/t}.u^k$.

On a : $l'(u) = k\,.\,u^{k-1}\left(1-\frac{u}{t}\right).\,e^{-ku/t}$. Donc, $l''(u) > 0$ pour $u \in [\varepsilon\,,t-\delta]$

$$A'_k(\varepsilon) = \underbrace{\frac{1}{k!}\,.\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\alpha(\varepsilon).l(\varepsilon)}_{\lambda_k(\varepsilon)} + \frac{1}{k!}\,.\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}.\underbrace{\int_\varepsilon^{t-\delta} \alpha(u).l'(u).\mathrm{d}u}_{\mu_k(\varepsilon)} \ .$$

Soit $\lambda_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \alpha(\varepsilon)\ l(\varepsilon)$.

On a : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} (\lambda_k(\varepsilon)) = 0$ car $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \alpha(\varepsilon) = \alpha(0) \in \mathbf{R}$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} l(\varepsilon) = 0$

et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+}\left(\int_\varepsilon^{t-\delta} \alpha(u)\,.\,l'(u).\mathrm{d}u\right) = \int_0^{t-\delta} \alpha(u)\,.\,l'(u).\mathrm{d}u$ car α et l' sont des fonctions réglées sur $[0\,,t-\delta]$. Donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} (A'_k(\varepsilon))$ existe et vaut

$$A'_k = \frac{1}{k!}\,.\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}\int_0^{t-\delta} \alpha(u)\,.\,l'(u).\mathrm{d}u \ .$$

On a : $\int_0^{t-\delta} |\alpha(u)\,.\,l'(u)|.\mathrm{d}u \leq M.\int_0^{t-\delta} l'(u).\mathrm{d}u = M.l(t-\delta)$

et de là : $\left|A'_k\right| \leq \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} . M . e^{(-k/t)(t-\delta)} . (t-\delta)^k = a'_k$

Or, $\frac{a'_{k+1}}{a'_k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k . \left(1+\frac{1}{k}\right) . \left(1-\frac{\delta}{t}\right) . e^{-1+\delta/t}$

donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\frac{a'_{k+1}}{a'_k}\right) = \left(1-\frac{\delta}{t}\right) . e^{\delta/t} < 1$. Ce qui implique $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(a'_k\right) = 0$

et donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(A'_k\right) = 0$

- Considérons $B'_k = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} . \int_{t-\delta}^{t} e^{-ku/t} . u^k . \varphi(u) . du$

On va utiliser le lemme 2'. Posons $h(x) = \ln(x) - \frac{x}{t}$ (cf. démonstration du lemme 3). On obtient :

$$\int_{t-\delta}^{t} e^{-ku/t} . u^k . \varphi(u) . du \underset{k \to +\infty}{\sim} \varphi(t-) . e^{k . (\ln t - 1)} . \sqrt{\frac{-\pi}{2k . (-1/t^2)}}$$

$$= \varphi(t-) \cdot t^{k+1} e^{-k} . \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

et donc $B'_k \underset{k \to +\infty}{\sim} \varphi(t-) . \frac{1}{k!} \cdot k^{k+1} e^{-k} . \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$. D'où, grâce à la formule de Stirling : $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(B'_k\right) = \frac{1}{2} \varphi(t-)$

- Conclusion : on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(A'_k + B'_k\right) = \frac{1}{2} \varphi(t-)$ (CQFD)

Lemme 5 : Si φ est une fonction réelle réglée sur $]0, +\infty[$ telle que :

- il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ pour lequel l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-cx} . \varphi(x) . dx$ converge,

- l'intégrale $\int_0^1 \varphi(x).dx$ converge.

Alors : pour tout $t \in]0\ ,+\infty[$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ku/t}.u^k.\varphi(u).du \right) = \frac{\varphi(t+) + \varphi(t-)}{2}$$

Preuve : on écrit $\int_0^{+\infty} = \int_0^t + \int_t^{+\infty}$ et on utilise les lemmes 3 et 4.

6.2-Théorème 8 : Soit f une fonction réelle réglée sur $]0\ ,+\infty[$ telle qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ pour lequel l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ct} f(t).dt$ est AC, alors, pour tout $t \in]0\ ,+\infty[$ on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} .(-1)^k \hat{f}^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right) \right) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2} \quad \text{avec } \hat{f} = \mathcal{L}(f)$$

Preuve : il suffit d'appliquer le théorème 5 et le lemme 5.

Conséquence : Si f et g sont des fonctions réglées sur $]0\ ,+\infty[$ ayant des transformées de Laplace définies sur $(a\ ,+\infty[$ et coïncidant sur cet intervalle, alors, pour tout $t \in]0\ ,+\infty[$, on a

$$f(t+) + f(t-) = g(t+) + g(t-).$$

Donc, en tout $t \in]0\ ,+\infty[$ où f et g sont continues, on a $f(t) = g(t)$.

Ainsi est donnée une réponse au problème de l'inversion de la transformation de Laplace.

8-Pour aller plus loin :

8.1-Des théorèmes taubériens :

a) Dans l'utilisation des séries, on tombe parfois sur le problème suivant :

Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est une série entière convergeant sur $]-1\ ,1[$, S'il existe $l = \lim_{x \to 1-} (f(x))$ ($l \in \mathbf{R}$), avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$;

A-t-on : $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et de somme l ?

S'il y avait une réponse positive à cette question, on disposerait alors d'une réciproque au théorème bien connu d'Abel : «Si $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et si $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, alors $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ admet la limite $l = \sum_{n \geq 0} a_n$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures».

Dans le cas général, le problème ($\mathcal{T}$) n'a pas de réponse positive (exemple : prendre le développement en série entière de $x \to \dfrac{1}{1+x}$ sur]- 1 , 1[), mais il en a une si on ajoute une hypothèse supplémentaire.

Gauss avait déjà eu quelques idées. Mais c'est Tauber qui le premier (en 1897) établit un théorème précis. Il montre que l'hypothèse supplémentaire : « $a_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ » suffit pour que l'on puisse répondre oui à ($\mathcal{T}$).

Puis, Littlewood montra que l'hypothèse $a_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ suffit, et Hardy (en 1910) que l'hypothèse «la suite $(n\, a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée ou minorée» suffit.

b) Ce problème sur les séries entières a un correspondant sur les intégrales qu'on peut formuler ainsi :

«Si pour tout $x \in \mathbf{R}^*+$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}.a(t).dt$ est une intégrale convergente, et si $\lim_{x \to 0+} (F(x)) = l$ existe dans $\mathbf{R}$, alors l'intégrale

$\int_0^{+\infty} .a\,(t).dt$ est-elle convergente, de valeur l .»

On voit intervenir ici la transformation de Laplace.
Tauber montra que pour cette question admette une réponse positive, il suffit que $a\,(t) \underset{+\infty}{=} 0\left(\frac{1}{t}\right)$ (la fonction $t \rightarrow a\,(t)$ est supposée réglée sur $[0\ ,+\infty[$).

Puis Hardy et Littlewood prouvèrent que la condition moins restrictive suivante est également une condition suffisante :

⇨ pour tout $y \in \mathbf{R}^*{}_+$, $a\,(t) \underset{+\infty}{=} 0\,(e^{y\,t})$

⇨ et il existe $K > 0$ tel que, sur $[0\ ,+\infty[$, $t.a\,(t) \geq -K$ (ou bien, il existe $K > 0$ tel que, sur $[0\ ,+\infty[$, $t.a\,(t) \leq K$).

c) De ces «théorèmes taubériens» sur les intégrales, on peut aisément déduire les «théorèmes taubériens» sur les séries entières signalées en a).

8.2-Le théorème d'Hadamard-de la Vallée Poussin :

On connaît ce théorème fameux démontré simultanément et indépendamment en 1896 par Hadamard et de la Vallée Poussin, qui dit que $\pi\,(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln\,(x)}$ où $\pi\,(x)$ représente pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, le cardinal de l'ensemble des nombres premiers p tels que $0 < p \leq x$. En 1933, N.Wiener donna une belle démonstration de ce théorème basée sur la transformation de Laplace.