Echanges

Un truc de banquier

ou

de l'usage des approximations affines

Daniel Reisz
Vincelles

J'ignorais comment les banquiers pouvaient dire quasi-instantanément le temps que met un placement à intérêts composés pour doubler de valeur : il suffit de diviser 72 par le taux d'intérêt. Ainsi, une somme placée à 4,5% met 16 ans à doubler, à 7%, un peu plus de 10 ans, etc … Une règle d'une telle simplicité mérite qu'on s'y arrête.

Une somme S_0 placée à 1% a pour valeur, au bout de n années :

$$S_n = S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^n .$$

Déterminer le nombre d'années nécessaires au doublement du capital initial revient donc à résoudre l'équation : $2S_0 = S_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$

soit $$\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n = 2$$

ou encore $$n = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{i}{100}\right)}.$$

Le banquier, lui, utilise $$n = \frac{72}{i}.$$

Si ce «truc» est sérieux, cela signifie que la fonction $i \to \frac{72}{i}$ est une bonne approximation de la fonction $f : i \to \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{i}{100}\right)}$ au moins sur l'intervalle des intérêts usuellement pratiqués.

Un coup d'œil sur une calculatrice graphique montre tout de suite que cette approximation est d'assez bonne qualité, mais il est intéressant de regarder cela de plus près, d'autant plus qu'il y a là un très joli thème d'étude pour les élèves de terminale.

Au niveau élémentaire du lycée, les seules approximations pratiquées sont les approximations affines, mais ici, on ne va pas comparer

$\dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{i}{100}\right)}$ et $\dfrac{72}{i}$, mais leurs inverses $\dfrac{\ln\left(1 + \frac{i}{100}\right)}{\ln 2}$ et $\dfrac{i}{72}$.

La classique approximation affine en $i = 0$ permet d'écrire

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{i}{100}\right)}{\ln 2} \approx \frac{1}{\ln 2}\left(\ln 1 + \frac{i}{100}\right) = \frac{i}{69{,}31}$$

ce qui amènerait bestialement à choisir 69, ou pour simplifier, 70. Pourquoi alors 72 ? On peut trouver à cela deux arguments :

→ 72 est plus riche en diviseurs que 70 et se prête donc mieux au calcul mental ;

→ la forme de la courbe représentative de f sur l'intervalle "utile" [0 , 20] suggère de rabattre un peu la droite d'approximation afin de passer de l'approximation affine en 0 à une approximation globalement plus satisfaisante sur l'intervalle [0 , 20].

Le tableau suivant permet d'y voir plus clair et de se rendre compte de la pertinence du «truc» du banquier.

i	$f(i)$	$69{,}31/i$	$70/i$	$72/i$
5	14,21	13,86	14	14,4
7,5	9,58	9,24	9,33	9,6
10	7,27	6,93	7	7,2
12	6,12	5,78	5,83	6
15	4,96	4,62	4,67	4,8
20	3,8	4,46	3,5	3,6

Mais un mathématicien a toujours envie de généraliser : combien d'années sont nécessaires pour qu'un capital S_0 placé à i % prenne la valeur $r\ S_0$ (le cas étudie précédemment correspond à $r = 2$).

La fonction f_r donnant le temps est $f_r(i) = \dfrac{\ln r}{\ln\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)}$ et l'approximation

obtenue par le calcul est donc $f_r(i) = \dfrac{100 \ln r}{i}$

Des conditions analogues à celles du cas $r = 2$ amènent au tableau suivant :

r	$100 \ln r$	Choix "raisonnable"
2	69,31	72
3	109,86	120
4	138,63	150
5	160,94	170

choix justifiés par les trois tableaux suivants :

$r = 3$

	$f_3(i)$	$109{,}86/i$	$120/i$
5	22,52	21,97	24
7,5	15,19	14,65	16
10	11,53	10,99	12
12	9,69	9,15	10
15	7,86	7,32	8
20	6,03	5,49	6

$r = 4$

	$f'_4(i)$	$138{,}63/i$	$150/i$
5	28,41	27,72	30
7,5	19,17	18,48	20
10	14,54	13,86	15
12	12,23	11,55	12,5
15	9,92	9,24	10
20	7,6	6,93	7,5

$r = 5$

	$f_5(i)$	$169{,}94/i$	$170/i$
5	32,99	32,19	34
7,5	22,25	21,46	22,7
10	16,89	16,09	17
12	14,20	13,41	14,2
15	11,51	10,73	11,3
20	8,83	8,05	8,5