Dans nos classes

Le clocheton

Jacques Verdier
Lycée A.Varoquaux - Tomblaine

Je remercie particulièrement Louis DELVIG, élève de Terminale F5 au lycée A.VAROQUAUX (54 TOMBLAINE), qui a contribué avec moi à la rédaction de cet article
J.V.

On pourrait définir le clocheton comme une pyramide hexagonale amputée.

Soit un hexagone régulier [ABCDEF] (de centre O et de rayon *r*) sis dans le plan horizontal.

Soit la pyramide régulière de sommet S, de hauteur *h*, ayant pour base l'hexagone précédent.

On considère les trois plans verticaux de traces horizontales (AC), (CE) et (EA), qui coupent les trois arêtes (SB), (SD) et (SF) de la pyramide respectivement en I, J et K.

On appellera ***clocheton*** la partie de la pyramide intérieure au prisme formé par ces trois plans verticaux..

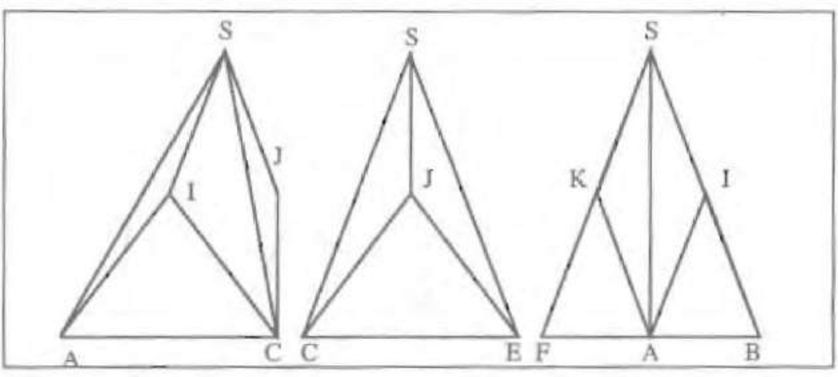
Le clocheton est donc un polyèdre de l'espace ayant sept sommets (A,C,E,I,J,K,S), une face horizontale équilatérale (ACE), trois faces verticales isocèles (AIC, CJE, EKA) et six faces triangulaires "obliques" isométriques (SAI,SIC,SCJ,SJE,SEK,SKA).

Une fois le clocheton défini, il peut donner lieu (en classe ou à la maison) à plusieurs activités différentes :
- représenter ce clocheton [par des vues de face ou de côté en géométrie descriptive (épure), ou en perspective cavalière] ;
- calculer, en fonction de h et de r, les longueurs des arêtes, le volume, l'aire de la surface latérale ;
- réaliser un "patron" du clocheton pour le construire ;
- étudier l'incidence de la "forme" (c'est à dire du rapport h/r) sur le volume ou l'aire ;
- etc ...

J'ai fait cet exercice en T.D. (classe dédoublée) en Première F5, avec construction effective du "patron" en carton, et en devoir de recherche à la maison en Terminale F5 (surtout pour la partie calcul des aires et volumes, et variations de l'aire en fonction de h/r).

I.Représentation du clocheton.

I.1.Vues de côté, perpendiculairement à (AD), (CE) et (BE) : figure 1



I.2.Epure, le plan frontal contenant une parallèle à (AC).

Remarquer que, le plan (AIC) étant parallèle au plan frontal, la face [AIC] est représentée en vraie grandeur en [a'i'c'].

I.3.Représentation en perspective cavalière.

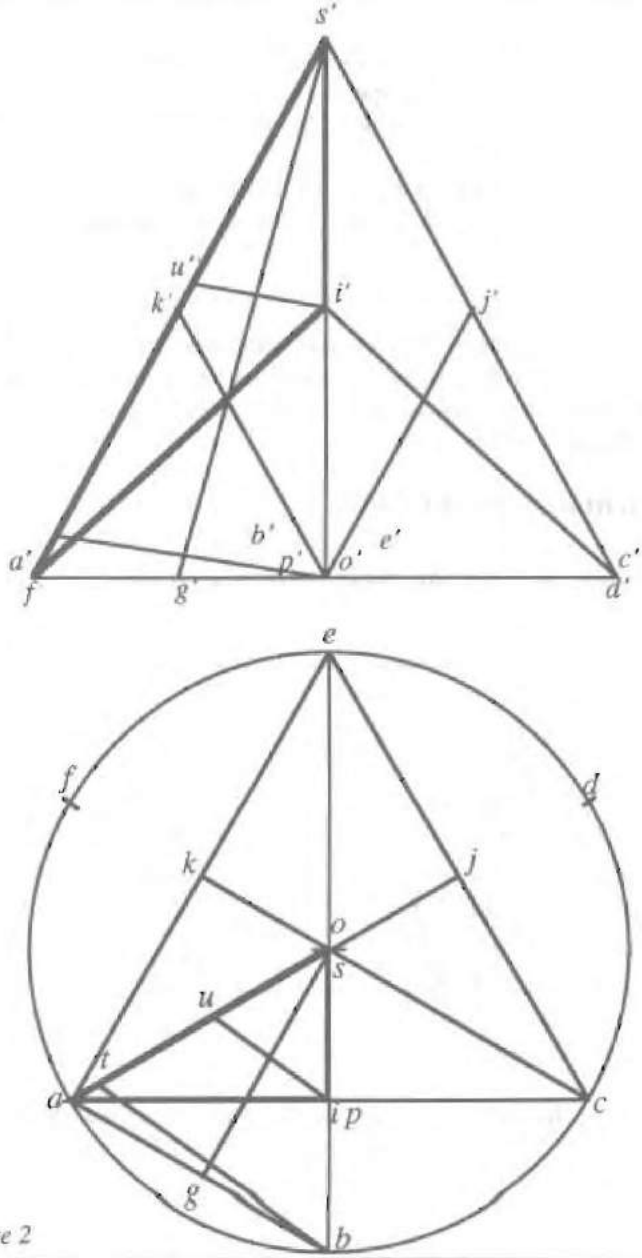


Figure 2

J'ai choisi (AD) comme direction "de base" dans le plan horizontal, et un angle de 45° et un rapport 1/2 pour la direction perpendiculaire. Cette représentation en perspective constitue un excellent exercice qui aurait tout à fait sa place en classe de seconde ; toute la difficulté consiste à représenter l'hexagone ABCDEF qui sert de base à la construction : il faut étudier (dans le plan) les propriétés de l'hexagone inscrit dans le cercle de rayon r, montrer que $CE = AC = r\sqrt{3}$, $OQ = 1/2$ etc.

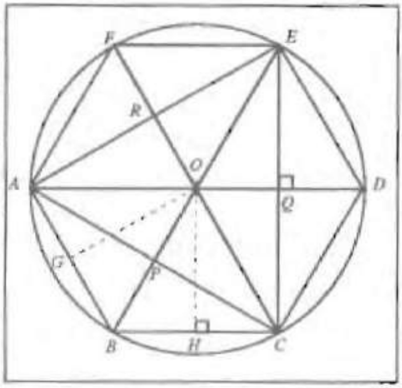
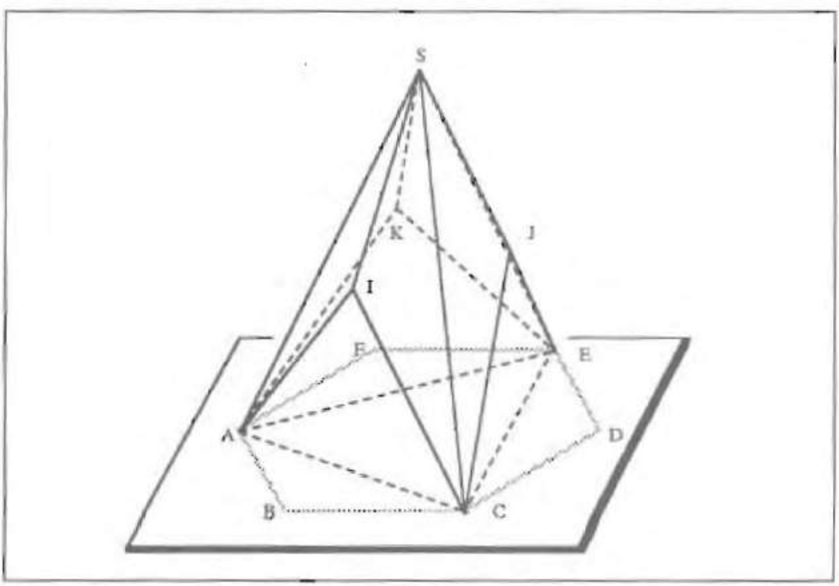


figure 3

puis représenter en perspective le "réseau" des parallèles (FE)//(AD)//(BC) puis (FB)//(OH)//(CE), sachant que, dans une direction donnée, la perspective cavalière conserve les rapports de longueurs.

La suite n'est qu'une question de précision dans les tracés. Voici un clocheton pour lequel $h/r = 3$: *(figure 4)*

Une autre méthode peut être utilisée, ne nécessitant aucun calcul, mais on



ignore la valeur de l'angle et du rapport utilisés pour déterminer les deux directions "principales" du dessin : on trace deux segments quelconques [FE] et [BC] de même longueur r. L'intersection de (FC) et (BE) donne O ; sur la parallèle à ces deux segments, passant par O, on peut déterminer les deux points A et D en reportant la longueur r de part et d'autre de O ; là encore, l'hexagone étant déterminé, la suite se construit sans aucune difficulté.

II.Calcul des arêtes, du volume et de l'aire.

Aucune difficulté particulière pour les calculs de PI, BS, SI, AC, AI, SA, et de l'aire du triangle isocèle AIC ($rh\sqrt{3}/4$) .Voir figures et résultats ci-dessous.

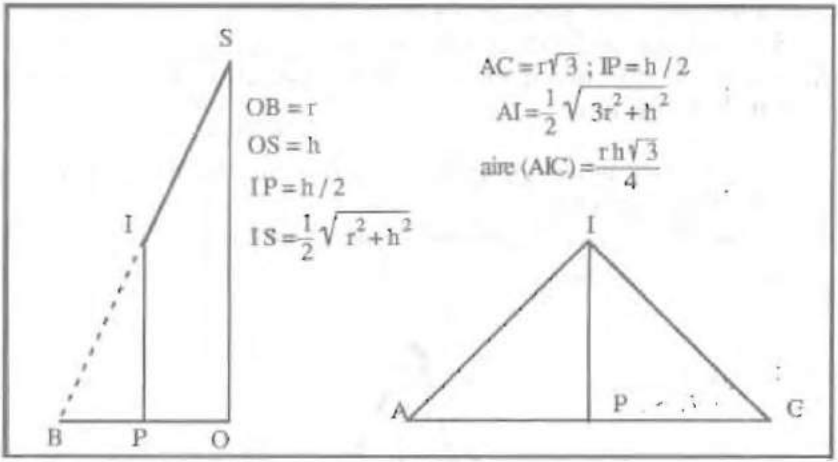


figure 5

Une façon très simple de calculer l'aire (ASI) : il suffit de montrer qu'elle vaut la moitié de l'aire de (ASB) (cf.figure au paragraphe 3). En effet, I étant le milieu de [SB], la hauteur IG' du triangle (AIB) vaut SG/2 (G étant le milieu de [AB]) : l'aire du triangle (AIB) vaut donc la moitié de celle de (SAB), soit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} r\sqrt{3r^2 + 4h^2}$ (SG se calculant dans le triangle GOS).

Une autre façon de calculer l'aire de ce triangle, (mais qui fait appel à

une propriété qui n'est pas au programme de seconde ni de première ou de terminale F) :
ce triangle (ASI) se projette en [APO] sur le plan horizontal ; si on nomme α l'angle dièdre, c'est à dire l'angle (GS,GO) on aura :
Aire (APO) = $\cos\alpha \times$ Aire(ASI)
or l'aire de APO est extrêmement simple à déterminer, ainsi que α (dans le triangle GOS), d'où l'aire de ASI.

On obtient ainsi l'***aire latérale totale*** du clocheton :

3 x Aire(AIC) + 6 x Aire (ASI), soit $A = \frac{3}{4}\left(r\,h\sqrt{3} + r\sqrt{3r^2 + 4h^2}\right)$

Quant au volume du clocheton, il se calcule aisément en ôtant du volume total de la pyramide hexagonale initiale le volume des trois tétraèdres ABCI, CDEJ et EFAK. On sait que le volume de la pyramide est $\Sigma \times H/3$, Σ étant l'aire de la base et H la hauteur.

Pour la pyramide hexagonale initiale, on a $H = h$ et $\Sigma = 3r^2\sqrt{3}/2$.
Chacun des petits tétraèdres est une pyramide (non régulière) de hauteur $H = h/2$ et d'aire de base $\Sigma = 3r^2\sqrt{3}/4$ (les calculs de Σ se font "dans le plan", voir figure au §I.3).

Le volume du clocheton est donc $V = 3\sqrt{3}\,hr^2/8$.
(soit les trois quarts de celui de la pyramide initiale).

III-Réalisation d'un "patron" du clocheton.

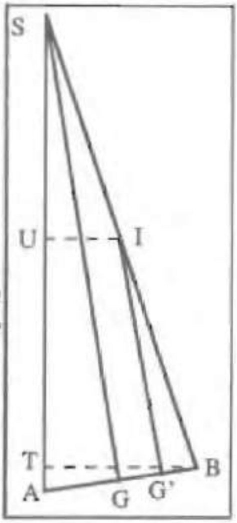
Au paragraphe II, on a calculé les longueurs de certaines arêtes. Les longueurs de celles du triangle SAI sont un peu plus délicates à déterminer. Considérons le triangle SAB : on a $GS^2 = SA^2 - AG^2$ d'où

$$GS = \frac{1}{2}\sqrt{3r^2 + 4h^2}.$$

Les triangles rectangles SAG et BAT ont des angles égaux, donc leurs côtés respectifs sont proportionnels, d'où : $\frac{SB}{BA} = \frac{AG}{AT} = \frac{GS}{TB}$, d'où :

$$TB = \frac{r\sqrt{3r^2 + 4h^2}}{2\sqrt{r^2 + h^2}} \text{ et } IU = TB$$

(car I est le milieu de SB et Thalès).



NB : on aurait pu trouver ce résultat autrement en réutilisant l'aire de (SAI) déterminées au paragraphe II.

En prenant par exemple $r = 5$ cm et $h = 15$ cm, on obtient les résultats suivants à 10^{-2} cm près : SA = 15,81 ; SI = 7,91 ; AI = 8,66 ; UI = 2,47 (hauteur du triangle SAI) ; l'angle ASI vaut environ 18,2°.

On peut alors réaliser le "patron" en deux parties : d'une part les six triangles latéraux, d'autre part la réunion des trois faces verticales et de la base (cette réunion est un "quadruple triangle équilatéral").

Un peu de Scotché", de la dextérité et le tour est joué! voir figure 7.p.153

IV-Un peu d'analyse : le coefficient $k = h/r$

La forme du clocheton est définie par le rapport $k = h/r$.

Les calculs précédents montrent que $V = 3\sqrt{3}\, hr^2 / 8$ et que l'aire latérale vaut alors $A = \frac{3}{4}\left(k\sqrt{3} + \sqrt{3 + 4k^2}\right)r^2$.

Si on prend r comme unité, on peut étudier A en fonction de k. La courbe a l'allure suivante : (voir schéma page 154).

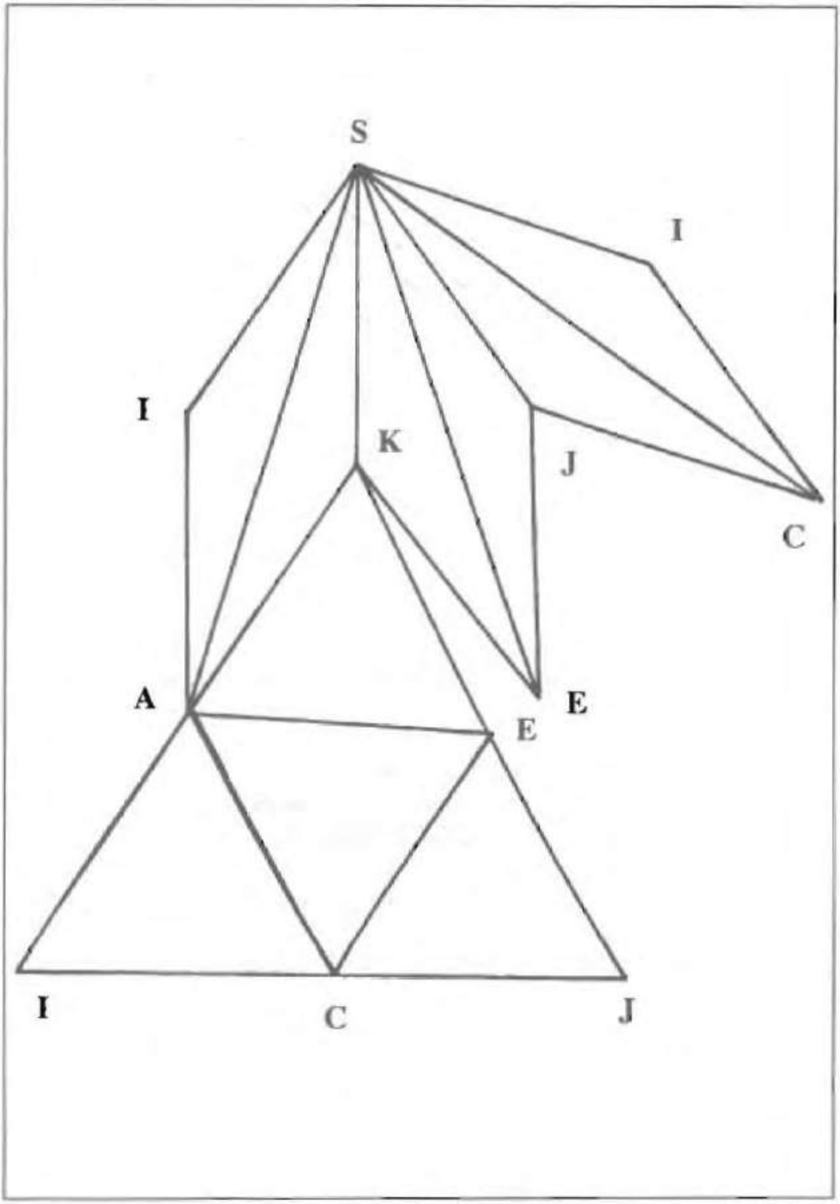
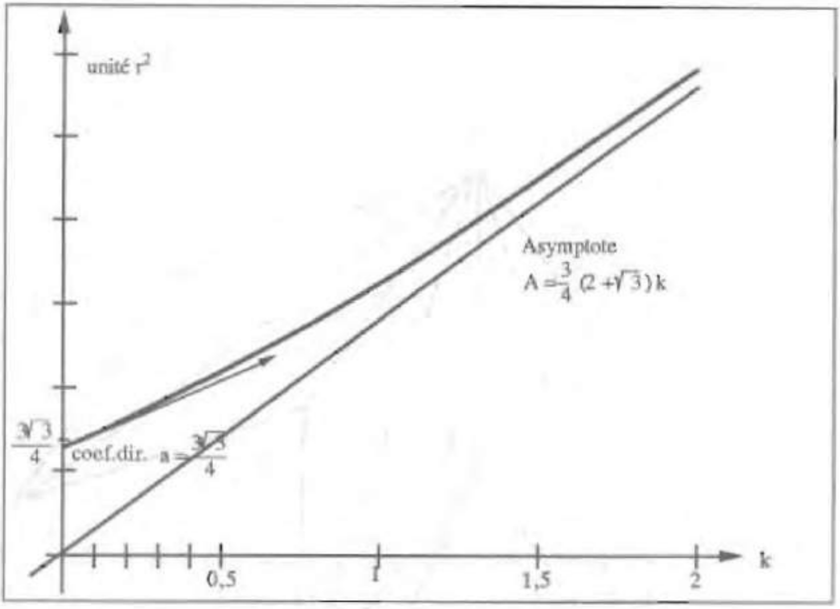


Figure 7



Quand $k = 0$, le clocheton est "dégénéré" : il se confond avec sa base équilatérale.

ANNEXE

Devoir à la maison (Terminale F5)

«LE CLOCHETON»

Définition du clocheton :

Soit un hexagone régulier ABCDEF, de rayon r et de centre O, sis dans le plan horizontal.

Soit la pyramide régulière de sommet S, de hauteur h, ayant pour base l'hexagone précédent.

On considère les trois plans verticaux de trace AC, CE et EA, qui coupent les arêtes SB, SD et SF de la pyramide respectivement en I, J et K.

On appelle **«clocheton»** la partie de la pyramide intérieure au prisme formé par ces trois plans verticaux.

Le clocheton a donc sept sommets ; A, C, E, I, J, K, S ;

une base équilatérale

trois faces verticales identiques AIC, CJE et EKA ;

et six face obliques SAI, SIC, SCJ, SJE, SEK et SKA.

Travail à faire

1°)Expliquer comment, en perspective cavalière, on peut dessiner un hexagone ABCDEF dans le plan horizontal.

En déduire un tracé du clocheton en perspective cavalière, que l'on fera très soigné sur feuille séparée (on pourra prendre $r = 5$ et $h = 5$).

2°)Calculer (en fonction de r et de h) le volume du clocheton.

On rappelle que le volume d'une pyramide quelconque d'aire de base $\mathcal{B}$ et de hauteur H est $1/3\ H\mathcal{B}$.

3°)Détterminer l'aire du triangle AIC, puis l'aire du triangle SIA (en justifiant très clairement la démarche).

En déduire l'aire latérale totale $\mathcal{A}$ du clocheton.

4°)Soit k le rapport $\dfrac{\text{hauteur}}{\text{rayon}}$ dans le clocheton.

On prendra r comme unité ($r = 1$).

Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de k.

Etudier les variations de la fonction $k \to \mathcal{A}$;

et en particulier le comportement de cette fonction pour k voisin de zéro (tangente ?).

Tracer la courbe représentative de cette fonction.