Schéma d'une activité en Troisième.

(A propos du Nombre d'Or).

Marie-Madeleine Delsahut

1-.Construction des polygones réguliers inscrits dans un cercle (à *n* côtés).

Pour $n = 3$ et $n = 6$ (Le triangle équilatéral et l'hexagone régulier) :

-Justification de la **construction**

-**Calcul de l'apothème «*a*» et du côté «*c*» en fonction du rayon du cercle.** (Rappel des propriétés du triangle équilatéral).

Pour $n = 4$ et $n = 8$ (Le carré et l'octogone régulier) :

-Mêmes questions.

-Calcul de «*a*» et «*c*» en fonction de «*r*» en utilisant

d'une part les relations trigonométriques

d'autre part la propriété de Pythagore et les propriétés du triangle rectangle isocèle.

et en déduire la valeur exacte de cos **22,5°** et sin **22,5°** (cos 67,5° et sin 67,5°).

Pour n = 12 (Le dodécagone régulier) :

-Mêmes questions

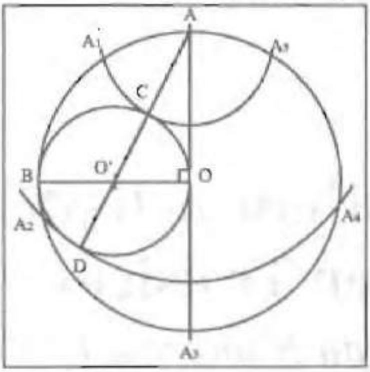
-En déduire les valeurs exactes de cos 15° et cos 75°.

Pour n = 5 (Les pentagones réguliers : le convexe et l'étoilé) :

-Construction, sachant que 360° = 5 x 72° en utilisant le rapporteur.

-Détermination de leurs angles (angles inscrits).

-Construction au compas.



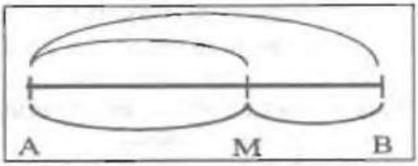
(où l'on trouve le "nombre d'or" ⇒ activité suivante).

Pour n = 10 :

-Construction du décagone convexe régulier.

2-.Le nombre d'or - La divine proportion.

Si M partage le segment [AB] de telle sorte que $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$ (= φ) alors le partage est particulièrement harmonieux et la valeur commune de ces deux rapports est φ: **le nombre d'or.**



Si AM = 1, $\varphi = \frac{1}{\varphi^{-1}}$ ou $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$

a) Développer $(\varphi - 1/2)^2$

En déduire que $\varphi^2 - \varphi = \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ et $\varphi^2 - \varphi - 1 = = \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

b) En déduire une factorisation de $(\varphi^2 - \varphi - 1)$ en produit de deux facteurs du premier degré en φ, puis la valeur positive de φ.

c) $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ (plusieurs façons).

d) Donner une valeur approchée de φ au millième ainsi que de φ^2 et $(\varphi - 1)$.

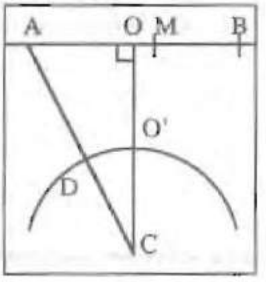
Donner la valeur exacte de φ^2 et $\dfrac{1}{\varphi}$.

e) Une construction du point M pour un segment [AB] donné : *figure*

◊ Montrer que si AB = 1, alors $AM = \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

◊ O est le milieu de [AB]
O' est le milieu de [OC] ; OC = AB.

Montrer que si AB = 1, $AC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $AD = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.



3-. Un rectangle d'or : $\dfrac{L}{l} = \varphi$

Remarque : Si on enlève un carré de côté l à ce rectangle, on obtient un nouveau rectangle d'or.

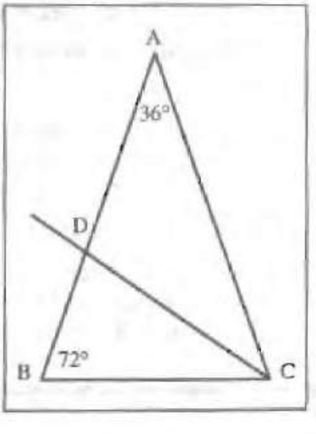
4-.Le triangle d'or :
Triangle isocèle dont les angles mesurent 36° et 72°.

Exercice :a)Montrer que si (CD) est la bissectrice de $\widehat{BCA}$, alors les triangles BCD et ABC ont les mêmes angles.

b)Par quelle transformation l'image de BDC est-elle ADD',avec (DD') parallèle à (BC) ?

◊ En déduire que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{BD}$.

◊ Quelle est la valeur commune de ces deux rapports ?



◊ Montrer que $\dfrac{AB}{BC} = \varphi$

c) Calculer la valeur exacte de cos 36° et cos 72° (puis de sin 36° et sin 72°)

d) $\cos 36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ $\qquad \cos 72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Vérifier à la calculatrice l'exactitude de ces deux résultats.

5°-.Les pentagones réguliers

Reprendre la construction au compas et la justifier (on peut s'inspirer des résultats du 4°).