Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes»... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imgination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées SVP) :

François LO JACOMO
21, rue Juliette Dodu
75010 PARIS

Et oui, vous l'avez compris à ce changement d'intitulé, Dominique ROUX «cède» la rubrique à son successeur, François LO JACOMO. Il nous fait, en fin de Rubrique, de discrets adieux.

Méditatif ou admiratif, qui d'entre nous n'a pas été passionné par ces énoncés toujours renouvelés grâce au patient travail de D.ROUX ? Nous savons qu'il va continuer à œuvrer pour leS publications de l'A.P.M.E.P., et en lui souhaitant pleine réussite pour la suite, nous lui disons notre reconnaissance émue. Au nom de l'Association, Merci, cher Collègue!

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 199 (Daniel REISZ, Dijon).
Un disque de rayon 1 est partagé en quatre régions par deux cordes perpendiculaires. Quelle est la plus grande valeur possible de la somme des rayons des cercles inscrits dans ces quatre régions ?

ÉNONCÉ N° 200 (Dominique ROUX, Limoges).

Pour tout entier N, notons $\overline{N}$ le «renversé» de N et posons $\Delta\ (N) = |N - \overline{N}|$.

Par exemple, si $N = 153$, $\overline{N} = 351$ et $\Delta\ (N) = 198$.

- Prouver que la suite (U_n) définie par $U_0 = N$ puis $U_{n+1} = \Delta\ (U_n)$ est périodique à partir d'un certain rang.

- La longueur de la période obtenue peut-elle être plus grande que 2 ?
- Caractériser les entiers N pour lesquels $\Delta \circ \Delta(N) = N$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 184 (Dominique ROUX, Limoges).

Quels sont les entiers égaux à une somme de cinq carrés non nuls ?

SOLUTION de Denis HARTEMANN (Cayenne, GUYANE).

→ ***Cas des entiers*** **≥ 170**

Soit N un de ces entiers. D'après le *Théorème de Lagrange*, l'entier (non nul) N - 169 est égal à une somme de quatre carrés dont certains peuvent être nuls.

Donc, si x , y , z et t désignent des entiers non nuls, N - 169 peut s'écrire sous l'une des formes suivantes:

	$N - 169 =$	x^2	(cas 1)
ou	$N - 169 =$	$x^2 + y^2$	(cas 2)
ou	$N - 169 =$	$x^2 + y^2 + z^2$	(cas 3)
ou	$N - 169 =$	$x^2 + y^2 + z^2 + t^2$	(cas 4).

Il reste alors à écrire :

- dans le cas 1 : $N = x^2 + 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2$
- dans le cas 2 : $N = x^2 + y^2 + 12^2 + 4^2 + 3^2$
- dans le cas 3 : $N = x^2 + y^2 + z^2 + 12^2 + 5^2$
- dans le cas 4 : $N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 13^2$

Pour constater que tout entier $N \geq 170$ est égal à une somme de cinq carrés non nuls.

→ ***Cas des entiers*** **≤ 169**

Notons $\mathbf{N}_{169}$ l'ensemble des entiers non nuls ≤ 169

S_1 l'ensemble des carrés contenus dans $\mathbf{N}_{169}$

σ l'application $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$

$(x, y) \to x + y$.

On peut facilement construire les ensembles :

$$S_2 = \sigma(S_1 \times S_1) \cap \mathbf{N}_{169}$$
$$S_4 = \sigma(S_2 \times S_2) \cap \mathbf{N}_{169}$$
$$S_5 = \sigma(S_1 \times S_4) \cap \mathbf{N}_{169}$$

donnant successivement les entiers ≤ 169 s'écrivant comme sommes de deux, quatre ou cinq carrés non nuls.
On obtient : $S_5 = N_{169} - \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33\}$

→ ***Conclusion :***

Tous les entiers naturels sauf 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 9 , 10 , 12 , 15 , 18 , et 33 sont égaux à une somme de cinq carrés non nuls.

Autres solutions : Miguel AMENGUAL COVAS, (Cala Figuera, Espagne), Philippe DELEHAM (Reims), Edgard DELPLANCHE (Créteil), François LO JACOMO (Paris), Jean-Louis NICOLAS (Lyon), et solution partielle de Charles NOTARI (Noë).

Note : Pierre BARNOUIN (Caloris) fournit un petit programme qui donne les seuls nombres *inférieurs à 10 000* qui ne sont pas sommes de cinq carrés non nuls.

```
DIM K(50), S(12500):T = TIMER
FOR A=1 TO 50:K(A)=A*A
       FOR B=1 TO A:P=K(A)+K(B)
              FOR C=1 TO B:Q=P+K(C)
                     FOR D=1 TO C:R=Q+K(D)
                            FOR E=1 TO D:S(R+K(E))=1
NEXT E,D,C,B,A
FOR I=1 TO 10000
       IF S'I)=0 THEN PRINT I;
NEXT:PRINT:PRINT: TIMER-T"sec"
ZBasic Ready
       1      2      3      4      6      7      9      10
       12     15     18     33
131    sec
```

ÉNONCÉ N°185 (François LO JACOMO, Paris).
Etant donné un triangle d'aire S, quelle est l'aire de l'ensemble des points par lesquels on peut faire passer trois droites partageant le triangle en deux moitiés d'aires égales ?

SOLUTION de Roger CUCULIÈRE (Rabat)
Une droite qui partage un triangle coupe exactement *deux* de ses côtés-*segments*. Les droites cherchées se répartissent en trois familles : celles qui coupent les *segments* [AB] et [AC], celles qui coupent [AC] et [BC], celles qui coupent [BC] et [AB]. Une droite de la première famille se définit par le fait qu'elle coupe [AB] et [AC] en M et N tels que $AM.AN = 1/2\ AB.AC$ (figure

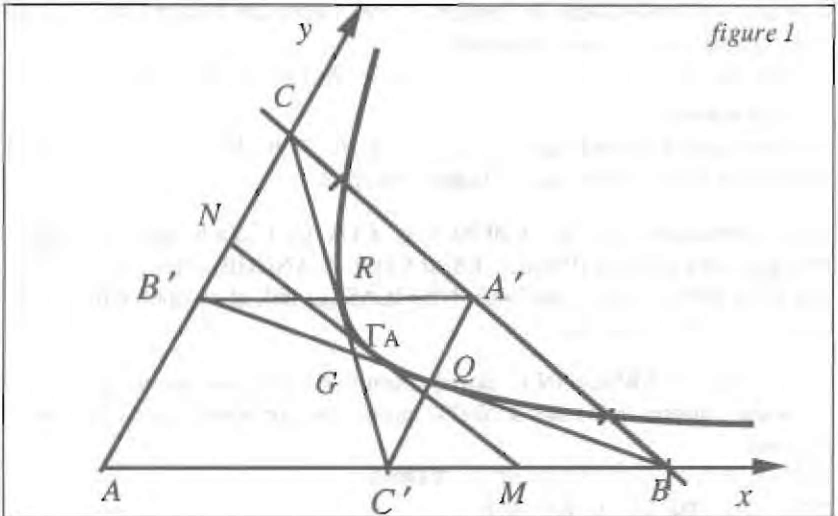


figure 1

1).

L'équation de ces droites dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est : $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, avec $m\,n = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq n \leq 1$. Ces droites enveloppent l'arc Γ_A de l'hyperbole d'équation $x\,y = \frac{1}{8}$, compris entre les points Q et R, milieux respectifs des médianes (BB') et (CC') qui sont des positions-limites de la droite (MN).

Ces deux médianes et l'arc Γ_A permettent de déterminer les régions du plan, ensembles des points par lesquels passent 0, 1 ou 2 droites (MN), c'est-à-dire0, 1 ou 2 tangentes à l'arc Γ_A : c'est l'objet de la figure ci-contre.

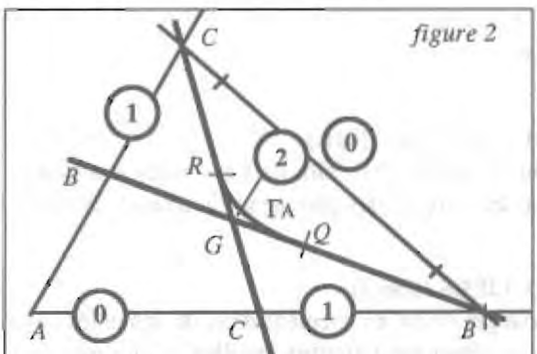


figure 2

Dans chacune des 5 régions délimitées par l'arc ΓA et ses tangentes extrêmes, on a porté le nombre de tangentes à ΓA passant par un point de cette région.

L'étude des droites cherchées qui coupent [AC] et [AB], puis [BC] et [AB] conduit au même résultat et montre que l'ensemble des points par où passent *trois* tangentes aux arcs Γ_A, Γ_B, Γ_C est exactement le «triangle curviligne» PQR délimité par ces trois arcs (figure 3).

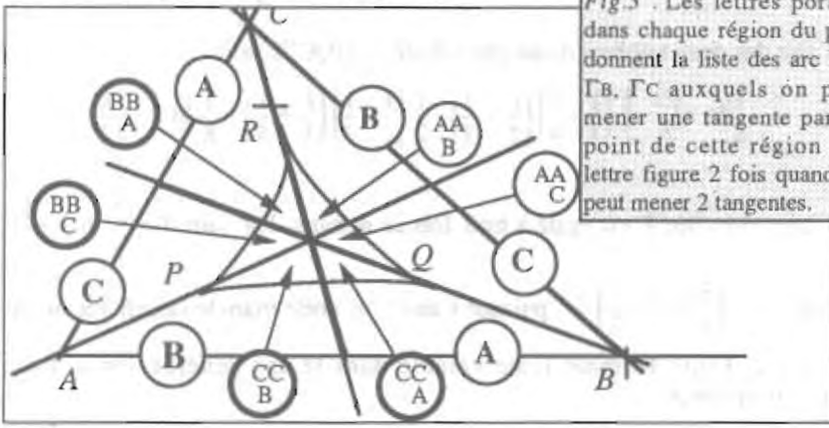
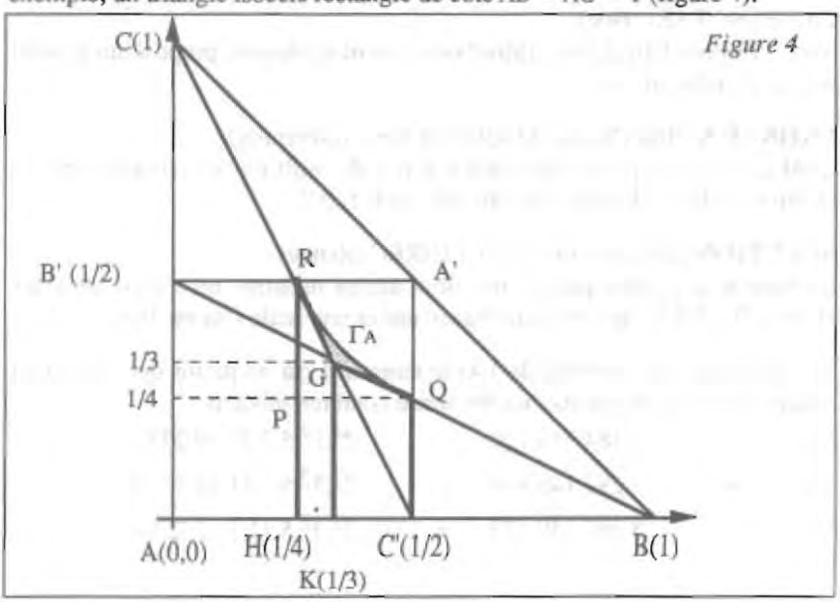


Fig.3 . Les lettres portées dans chaque région du plan donnent la liste des arc Γ_A, Γ_B, Γ_C auxquels on peut mener une tangente par un point de cette région ; la lettre figure 2 fois quand on peut mener 2 tangentes.

Pour déterminer l'aire X de cette région, on peut choisir un triangle ABC particulier car une transformation affine ne change rien au problème : par exemple, un triangle isocèle rectangle de côté $AB = AC = 1$ (figure 4).



L'aire limitée par [GR], [GQ] et ΓA est alors égale à $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{8x}$, diminuée de

l'aire des deux trapèzes rectangles GRHK et GQC'K, soit :

$$\frac{1}{8}[\ln x]_{1/4}^{1/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}\ln 2 - \frac{1}{12}$$

L'aire cherchée X est égale à trois fois ce nombre. Par suite, $X = \frac{3}{8}\ln 2 - \frac{1}{4}$,

soit : $X = \left(\frac{3}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\right)S$, puisque l'aire S de notre triangle isocèle rectangle est 1/2. Cette formule reste valable dans le cas général. On a donc $X \approx 0{,}019\,86.S$.

Autres solutions :
Michel BIGOT (Cherbourg), Guy BOUCHER (Paris), Jean-Claude CARREGA (Lyon), André FLAMBARD (Versailles), Daniel GUILBAULT (Reims), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë).
Note : Eugène EHRHART (Strasbourg) avait également proposé un problème sur le même thème.

ÉNONCÉ N° 186 Charles AUQUE, (Clermont-Ferrand).
Quel est le plus petit entier qui n'a pas de multiple s'écrivant avec 10 chiffres de 0 à 9, chacun étant pris une seule fois ?

SOLUTION de Pierre-Yves LE CLOIREC (Rennes).
En base dix, le plus petit entier dont aucun multiple ne s'écrit avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 pris chacun une et une seule fois est 100.

En effet, tous les multiples de 100 se terminent par au moins deux 0 et tout entier ≤99 divise au moins l'un des treize nombres suivants

$N_1 = 9\,184\,356\,720 = 2^4.3^4.5.7.11.79.233$

$N_2 = 7\,293\,145\,860 = 2^2.3^2.5.7.11.13.17.2381$

$N_3 = 8\,761\,359\,420 = 2^2.3^2.5.11.19.232\,891$

N_4	=	4 935 810 672	=	$2^4.3^2.13.23.29.59.67$
N_5	=	6 391 574 028	=	$2^2.3^3.7.37.83.2\,753$
N_6	=	7 512 639 048	=	$2^3.3^2.17.43.47.3\,037$
N_7	=	9 543 182 067	=	$3^2.17.53.79.14\,897$
N_8	=	6 123 798 540	=	$2^2.3^2.5.41.612.223$
N_9	=	6 513 078 429	=	$3^3.11.13.23.71.1\,033$
N_{10}	=	7 362 054 891	=	$3^2.73.11\,205\,563$
N_{11}	=	8 950 731 246	=	$2.3^2.31.89.180\,133$
N_{12}	=	6 795 823 104	=	$2^{11}.3^3.7.97.181$
N_{13}	=	4 918 627 350	=	$2.3^2.5^2.7^2.13.17\,159$

Pour vérifier cela, on passe en revue les entiers de 2 à 99 selon l'ordre décroissant de leur plus grand facteur premier. Les entiers premiers ≤99 étant 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 ce contrôle s'effectue comme suit :

$97 \mid N_{12}$ (| pour «divise»), $89 \mid N_{11}$, $83 \mid N_5$, $89 \mid N_{11}$, $79 \mid N_1$,

$73 \mid N_{10}$, $71 \mid N_9$, $67 \mid N_4$, $61 \mid N_8$, $59 \mid N_4$, $53 \mid N_7$,

47 et $94 \mid N_6$, 43 et $86 \mid N_6$, 41 et $82 \mid N_8$, 37 et $74 \mid N_5$,

31, 62 et $93 \mid N_{11}$, 29, 58 et $87 \mid N_4$, 23, 46, 69, et $92 \mid N_4$,

19, 38, 57, 76 et $95 \mid N_3$, 17, 34, 51, 68 et $85 \mid N_2$,

13, 26, 39, 52, 65, 78 et $91 \mid N_2$,

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 et $99 \mid N_1$.

Les entiers de plus grand facteur égal à 7 s'écrivent $2^a.3^b.5^c.7^d$ avec $d = 1$ ou 2.

Avec $d = 2$ il n'y a que 49 et 98 et ils sont tous deux diviseurs de N_{13}.

Avec $d = 1$ on a nécessairement $a \leq 3$, $b \leq 2$, $c \leq 1$. Les entiers concernés (7, 14, 21, 28, 35, 42, 56, 63, 70, 84) sont donc tous diviseurs de N_1.

Les entiers de plus grand facteur premier égal à 5 s'écrivent $2^a.3^b.5^c$ avec $c = 1$ ou 2.

Avec $c = 2$, il n'y a que 25, 50 et 75 et tous trois divisent N_{13}.

Avec $c = 1$ on a nécessairement $a \leq 4$, $b \leq 2$. Les entiers concernés (5, 10, 15, 20, 30, 40, 45, 60, 80, 90) sont donc tous diviseurs de N_1.

Les entiers de plus grand facteur premier égal à 3 s'écrivent $2^a.3^b$ avec $b = 1$, 2, 3 ou 4.

Avec $b = 4$ il n'y a que 81 et il divise N_1.

Avec $b \leq 3$ on a nécessairement $a \leq 6$. Les entiers concernés (3, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 96) sont donc tous diviseurs de N_{12}.

Enfin les puissances de 2 inférieures à 99 (2, 4, 8, 16, 32, 64) divisent N_{12}.

Ceci achève la vérification et prouve le résultat annoncé.

Commentaires :

Tout nombre N écrit avec une permutation des chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 est multiple de 9. La divisibilité par 5 ou par 2, 4, 8,...obéit à des critères élémentaires. On vérifie facilement que N est divisible par 11 si et seulement si la somme S_p de ses chiffres de rang pair et S_i celle de ses chiffres de rang impair diffèrent de 11 (observer que $S_p + S_i = 45$ et $10 \leq S_p, S_i \leq 35$).

La divisibilité par les nombres 7, 13, 17... est plus difficile à assurer ; par exemple, pour obtenir la divisibilité par 7, on a cherché une partition de (0,1,...,9) avec les chiffres de multiples de 7. Ayant trouvé la solution 0,35,84,91,672 on a retenu l'ordre de ces blocs qui donne l'entier N possédant la décomposition en facteurs premiers jugée la plus avantageuse (ici N_1).

N_5 est obtenu de même avec 63, 91, 574, 0, 28 eux aussi multiples de 7.

N_9 est la juxtaposition de 65, 13, 0, 78, 249 multiples de 13,

N_7 est la juxtaposition de 954, 318 et 2067 multiples de 53,

N_8 est la juxtaposition de 61, 2 379, 854 et 0 multiples de 61,

N_{10}, N_{11}, N_{12} et N_{13} sont construits de la même façon à partir de multiples de 73, 89, 97 et 49 respectivement.

N_2 est la juxtaposition de 7 293, 14 586 et 0 multiples de 17.11.13=2431

N_4 est la juxtaposition de 49 358 et 10 672 multiples de 23.29 = 667.

N_3 et N_6 résultent de tâtonnements et du hasard!

Enfin, signalons le nombre 9 765 312 480 = $2^5.3^3.5.7.11.31.947$ qui possède 49 diviseurs compris entre 2 et 99.

Autres solutions :

Pierre BARNOUIN (Calorès), Daniel BLOUIN (Nantes), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Denis HARTEMANN (Cayenne, Guyane), François LO JACOMO (Paris), et une réponse fausse.

COURRIER DE LECTEURS

1) Réponses tardives :

N°179 : Gilbert ROUX (L'haye les Roses)

N°182 : Franck VASSEUR (Longuyon).

2) François LO JACOMO (Paris) fait part de la remarque suivante : les énoncés 127, 142 et 175 permettent d'écrire pour tout triangle ABC et tout point M intérieur les inégalités

$$m\left(d_A\,.\,d_B\,.\,d_C\right) \leq \frac{1}{2}\,m\left(MA\,,\,MB\,,\,MC\right)$$

où d_A, d_B, d_C désignent les distances de M aux côtés du triangle et où m peut être la moyenne géométrique
ou la moyenne arithmétique
ou la moyenne harmonique de trois nombres.

Qu'en est-il de la moyenne quadratique. A-t-on encore

$$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 \leq \frac{1}{4}\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) ?$$

Eh bien non! Si cette inégalité est vraie au centre de gravité G du triangle car alors, $d_A \leq \frac{1}{2}\,GA$, $d_B \leq \frac{1}{2}\,GB$, $d_C \leq \frac{1}{2}\,GC$ elle, n'est plus vraie au centre du cercle circonscrit à ABC, car alors

$$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 = R^2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)$$

(en nommant α, β, γ les angles du triangle et R le rayon du cercle circonscrit).

Or, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$, l'égalité n'étant réalisée que pour le triangle équilatéral, d'où le résultat.

3) André VIRICEL (Villers les Nancy) envoie un abondant courrier comprenant, outre un remarquable carré trimagique 32 x 32, des extensions de la formule de PICK concernant l'aire d'un domaine polygonal dont les sommets sont nœuds d'un quadrillage $S = i + \frac{p}{2} - 1$ où i est le nombre de nœuds intérieurs et p celui des nœuds sur le contour. Il obtient

- d'une part «la formule des arêtes» $S = i + \frac{p + c}{4}$ où i désigne le nombre des arêtes du quadrillage intérieures au domaine, p le nombre des arêtes appartenant au pourtour et c le nombre des arêtes qui sont coupées par le pourtour.

- d'autre part la «formule des mailles» $S = i + \frac{c}{2}$ où i désigne le nombre des mailles (carrées) complètement incluses dans le domaine et c le nombre des mailles coupées par le contour.

4) Adieu à la rubrique

Depuis sept ans exactement, j'assure sans relâche la responsabilité de la rubrique des problèmes de l'A.P.M.E.P. Au terme de cette durée, le nombre des problèmes vient d'atteindre le seuil de la troisième centaine. Voici venu pour moi le moment de passer la main à un autre. Un septennat suffit, il faut que la roue tourne, le changement rajeunit. François LO JACOMO de Paris, que les lecteurs connaissent déjà par ses brillantes solutions ou ses beaux énoncés, accepte de prendre la suite dans ce travail bénévole certes passionnant mais aussi parfois lourd et prenant. Tout en le remerciant chaleureusement, je lui souhaite bonne réussite.

Qu'il me soit également permis d'exprimer ma gratitude à tous ces amis lecteurs qui ont constitué la rubrique et qui m'ont encouragé. J'ai admiré les idées, l'habileté des uns, les efforts déployés par d'autres et un grand courant de sympathie nous reliait par ces nombreuses lettres que je recevais de tant de régions de France et même du monde.

Je n'arrête pas pour me reposer mais pour essayer d'entreprendre un projet que je caresse depuis longtemps : celui de réunir les deux cents premiers énoncés de la rubrique en publications A.P.M.E.P., afin de sauvegarder, de classer, si possible de valoriser le fruit de la collaboration de tant de chercheurs. Je pense que trois tomes seront nécessaires : un d'arithmétique, un de géométrie et un d'algèbre, d'analyse et de combinatoire. Voilà du travail pour plusieurs années!

Longue vie à la rubrique, et surtout, n'oubliez pas : à partir du prochain *Bulletin*, le courrier sera à adresser à :

François LO JACOMO
21, rue Juliette DODU
75010 PARIS