Dans nos classes

Vers la rotation en seconde

J.P.Fornallaz
M.Magnenet

Au cours de différents stages animés durant l'année scolaire 1990/91 dans l'académie de Besançon, les enseignants travaillent par groupe sur des séquences d'apprentissage choisies par eux.

Nous vous proposons dans ce document une synthèse de travaux réalisés par ces groupes dans le domaine de la rotation.

Dans une première partie, *une fiche protocole* est proposée ; cela permet d'avoir une vue globale des différentes séquences d'enseignement et de leurs fonctions.

Un temps *indicatif* est donné pour chacune de ces parties, il s'agit d'intégrer ce thème dans les activités multiples de la classe sur une période d'une quinzaine de jours sachant que le thème rotation ne prendra qu'entre quatre et cinq heures (sans exclure bien sûr une utilisation ponctuelle de la rotation tout au long de l'année scolaire).

Ensuite, avant chaque partie de ce document, les intentions et objectifs de la séquence sont indiqués.

D'autre part, il paraît évident que l'on aurait pu étudier les transformations vues en seconde, avec ce même cadre, mais volontairement, nous avons choisi la rotation pour éviter toute dispersion dans les «réflexions» des stagiaires (nous donnons pour information des fiches produites par un autre groupe de travail concernant plusieurs transformations en annexe 1a' et 1b').

Enfin, des enseignants ont expérimenté, tout ou partie de ce document, c'est pourquoi, en annexe 5, des comportements d'élèves sont proposés dans les fiches de bord concernant l'annexe 1c.

FICHE PROTOCOLE

THEME : LA ROTATION

Durée : 4 à 5 heures

ACTIVITES (durée 1 h à 1,5 h)

- Reconnaître une rotation à partir de figures (cf.Annexe 1a)
- Reconnaître une rotation à partir de points transformés avec modification éventuelle de points (cf.Annexe 1b).
- Utiliser une rotation pour construire les images de différentes figures (cf.Annexe 1c).

OBJECTIFS ET SYNTHESE

(durée de la synthèse : 0,75 h).

Objectifs

En Quatrième :

- Transformation d'une figure par rotation (polygones réguliers).
- Propriétés conservées par rotation (à exploiter dans des tracés).
- Construire l'image, par une rotation donnée, d'un point, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle.

En Seconde

- Faire agir une rotation sur les figures : effet sur le parallélisme, l'alignement, les distances, les angles, les aires.

- ❖ Image d'une droite, d'un segment, d'un cercle.
- ❖ Image du milieu d'un segment, d'un parallélogramme.
- ❖ A tout point du plan on associe un point du plan bien déterminé.
- ❖ Pas de bijection, pas de composition, pas de réciproque.

Synthèse (Cf annexe 2).

Exercices (durée 1,5 h).

Exercices d'entraînement :

- Donner une figure.
- Préciser la rotation.
- Faire construire l'image par la rotation donnée.

Exercices de réinvestissement : (Cf.Annexe 3).

CONTROLE (durée 1 h).

Bilan : utiliser une rotation pour résoudre un problème (cf. Annexe 4).

ANNEXE 1a.

Les intentions et objectifs de l'activité :

Remarque préliminaire :

- Avant de commencer les activités sur la rotation proprement dite, il peut être envisagé de faire travailler les élèves sur un ensemble de dessins, permettant de réactiver l'«idée» des transformations rencontrées dans les classes du premier cycle, mais aussi dans la vie courante.

- Voir en annexe 1a' une partie du travail possible.

- Durée : une heure au plus.

Pour cette activité 1a :

- Le matériel utilisé est la règle graduée, le compas, le rapporteur ; dans certains groupes d'élèves, on pourra conseiller le papier calque et la punaise en plus.

- Pour deux figures F1 et F2 données au départ, il d'agit de reconnaître qu'il existe une rotation transformant F_1 en F_2.

- A travers cette activité préliminaire, l'intention est de faire émerger les représentations des élèves et de repérer leurs conceptions spontanées en ce qui concerne les transformations planes, à partir de figures figuratives (l'élève a-t-il une vision globale de la situation ? ou une vision locale ?)

- Cette figure de «skieur» (nous sommes en Franche-Comté à la sortie d'un hiver bien enneigé!...mais pourquoi pas un voilier...pour rêver!) est choisie pour sa richesse de propriétés implicites ou explicites que l'élève peut mettre en œuvre : image d'un segment, d'un cercle, de deux droites parallèles, de deux segments orthogonaux ... et nous pensons que l'élève investit davantage dans le cas d'une figure figurative et que le passage à la figure non figurative est plus aisé.

Dans une première étape les deux figures F_1 et F_2 ont un point et son image en commun. Il s'agit pour l'élève d'indiquer le centre de la rotation, de mettre en évidence un angle et de valider son choix (nécessité de démontrer ou d'admettre des propriétés dans la partie synthèse).

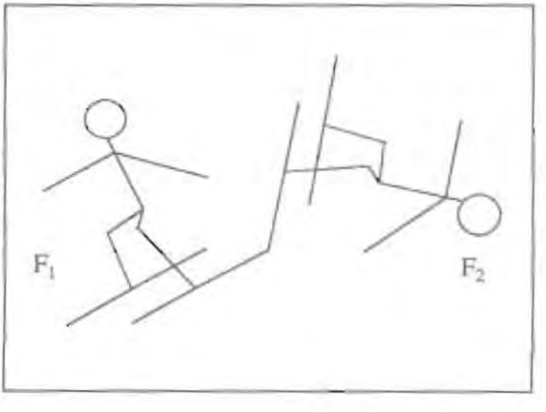
Dans une deuxième étape, F_1 et F_2 n'ont pas de point commun, l'élève peut alors proposer de se ramener au cas précédent en effectuant d'abord une translation, ou encore d'essayer de mettre en évidence directement une rotation en traçant par exemple les médiatrices du segment défini par deux points homologues, en proposant l'angle, puis il reste à valider sa proposition.

Dans une troisième étape, les figures F1 et F2 sont proposées mais avec une «erreur». Quelle modification l'élève peut-il proposer pour que «ça marche» ? Cela permet de voir si l'élève se pose réellement le problème de la validation.

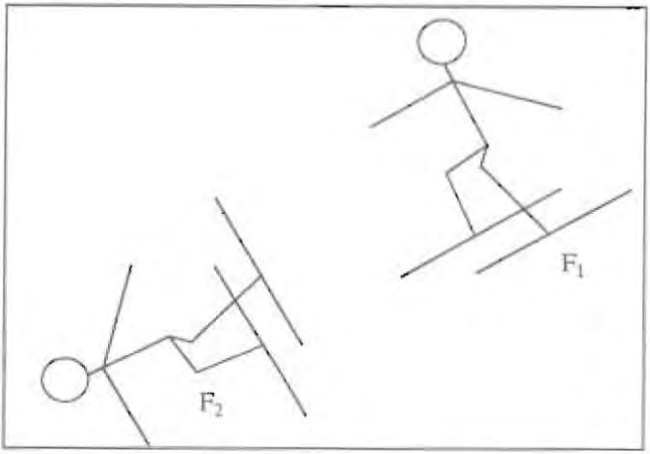
ANNEXE 1a'

Observer les figures F_1 et F_2. Pouvez-vous trouver une rotation qui transforme F_1 en F_2 ? Si oui, préciser tous les éléments de la rotation utilisée. Expliquez votre démarche.

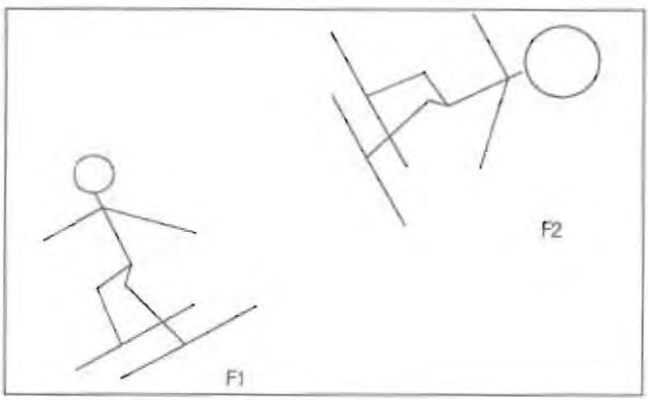
1) Premier dessin.



2) Deuxième dessin.



3) Troisième dessin.



ANNEXE 1b

Les intentions et objectifs de l'activité :

Trois points A, B, C non alignés, puis trois points A', B', C' non alignés étant donnés, reconnaître une rotation *r* telle que *r(A) = A'*, *r(B) = B'* et r(C) = C'. Proposer cette rotation, puis valider ce choix.

Dans le premier cas, A, B, C sont les sommets d'un triangle rectangle en B. L'élève est amené à voir globalement que le triangle rectangle ABC se transforme en le triangle A'B'C' rectangle en B', en fait que la rotation conserve la distance et l'angle droit.

En construisant les médiatrices des segments [AA'] et [BB'] se coupant en O, l'élève est amené à constater que les angles $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{BOB'}$ sont de même sens et de même mesure.

Souvent l'élève dessine le triangle ABC et le triangle A'B'C'.

Dans le deuxième cas, A et A' sont confondus.
ABC est un triangle isocèle (A, B, C non alignés et AB = AC). S'il existe une rotation, le centre peut être A. On a $(AB) \perp (A'B')$ mais (AC) non orthogonale à (A'C'). De plus, A'B'C' doit être un triangle isocèle, ce qui n'est pas le cas. C' est donc mal placé.

Ce deuxième cas permet de développer la capacité de conjecturer, de proposer, d'argumenter en mettant en œuvre implicitement des propriétés de la rotation.

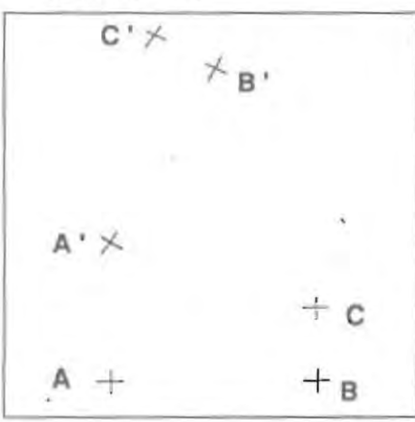
On peut compléter en demandant si par une rotation l'aire est conservée.

Remarque : Cette activité peut également se placer dans une problématique plus large, celle des transformations (voir Annexe 1b").

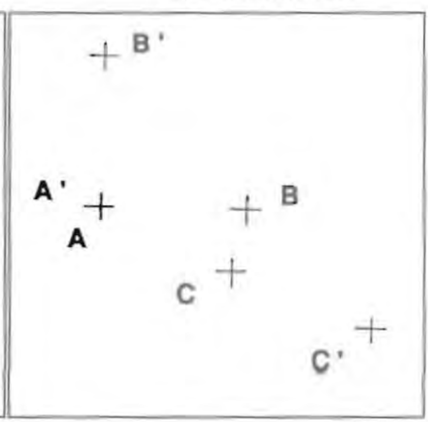
Annexe 1b'.

Proposer une rotation qui transforme A en A', B en B', C en C'. Si cela n'est pas possible, modifier la position du seul point C'. Expliquer votre démarche.

1) Premier cas



2) Deuxième cas.



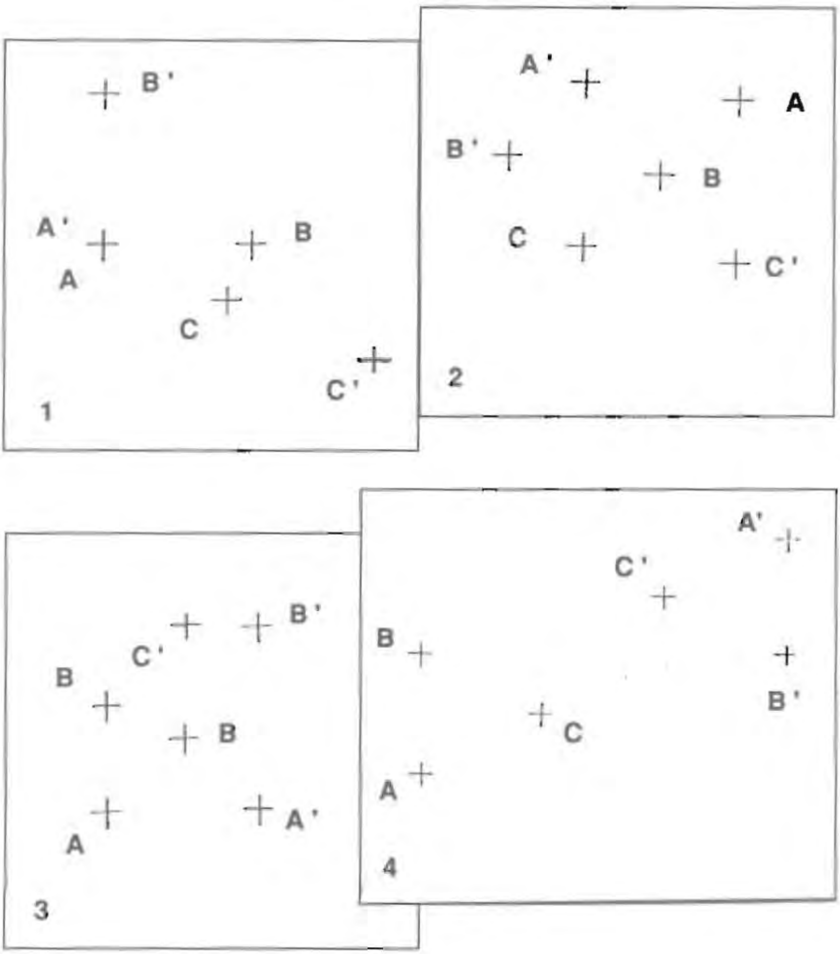
ANNEXE 1b"

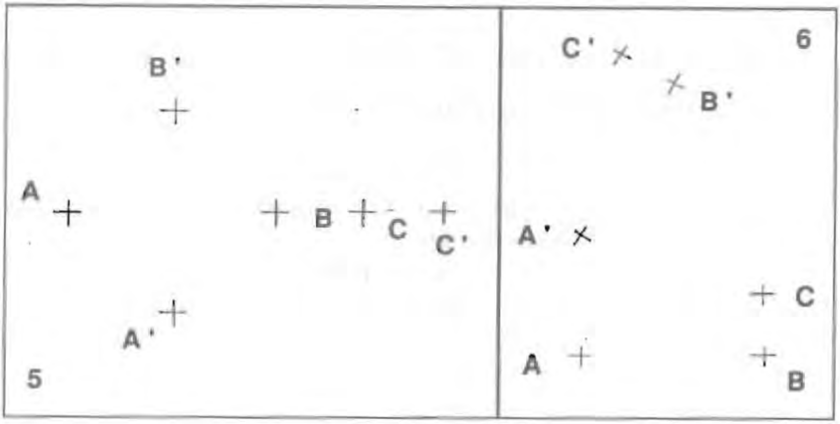
Parmi les transformations que vous connaissez :

translation, symétrie centrale, réflexion (symétrie orthogonale), rotation, homothétie.

Pouvez-vous proposer une transformation qui transforme A en A', B en B' et C en C' dans les cas suivants.

Si oui, laquelle ? Si non, modifier la position du seul point C'. Quelle transformation vous semble convenir ? Expliquez votre démarche.





ANNEXE 1c

Les intentions et objectifs de l'activité :

Il s'agit de construire l'image d'une figure figurative (ici une locomotive électrique) dans la rotation de centre O, qui transforme A en A'.

Une figure de référence est donnée sur un quadrillage carré.

Cela permet à l'élève de prendre des informations telles que :

- des droites sont parallèles, orthogonales.
- des angles sont donnés dans la configuration du triangle rectangle.
- des rapports de distance donnent la position relative de points alignés (par exemple, la position d'un sommet du carré sur un segment est précisée par le rapport $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{5}$).

Les élèves travaillent par petits groupes.

Le matériel utilisable est : le compas, la règle graduée, le rapporteur (le calque est interdit).

Un exemplaire de la figure de référence est donné par groupe, mais chaque élève a sa feuille pour faire ses essais, proposer puis construire l'image.

Chaque groupe doit noter sur **une fiche de bord** les différentes étapes de sa démarche.

Un observateur extérieur au groupe «filme» les points d'accord ou de désaccord, la démarche proposée par le groupe, la pertinence ou la non pertinence des éléments tracés ou des théorèmes en acte utilisés sur **une fiche de bord.**

Dans cette démarche, les élèves construisent leurs propres connaissances, il ne restera plus qu'à l'enseignant d'institutionnaliser un certain nombre de savoirs et savoir-faire en prenant appui sur le travail personnel des élèves, sans oublier de prendre en compte les erreurs de ceux-ci.

ANNEXE 1c'

Dessiner l'image de la figure par la rotation de centre O qui transforme A en A'.

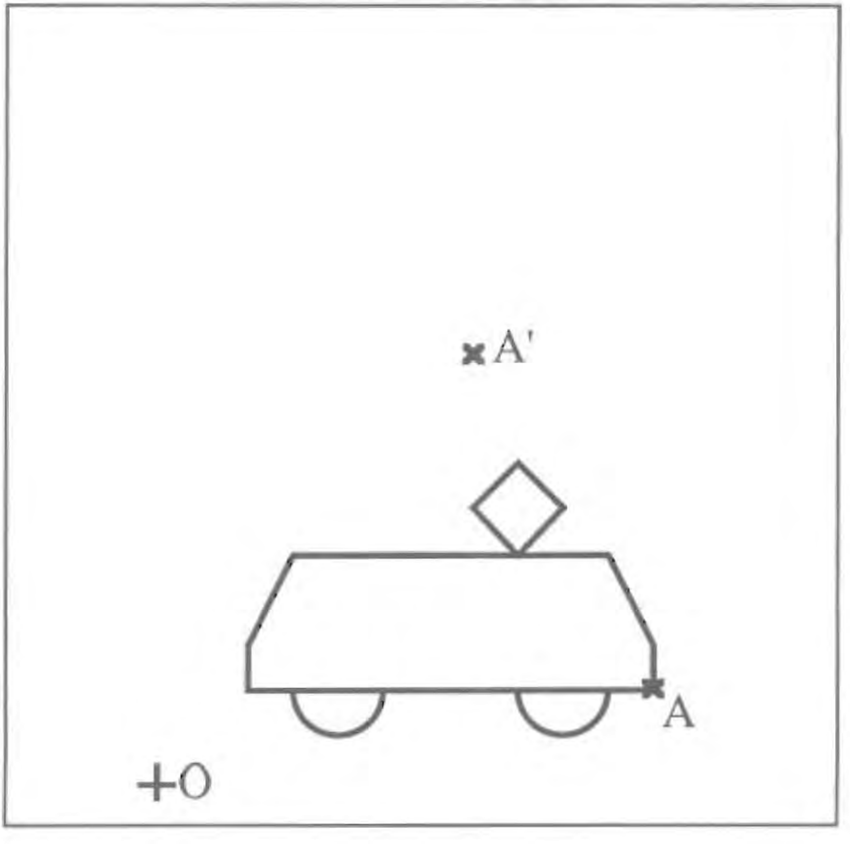
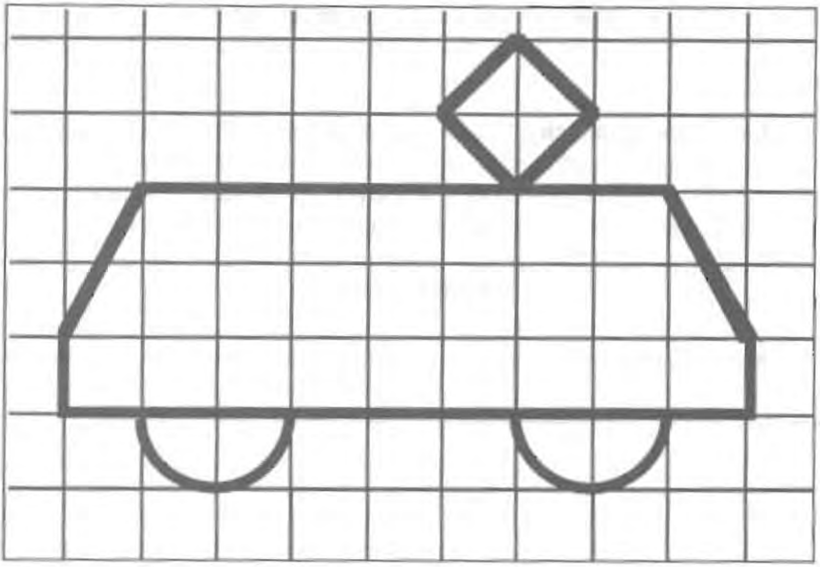


Figure de référence



(les mailles du quadrillage sont carrées).

Fiches de bord

Indiquer dans l'ordre d'exécution : les points tracés, ou les éléments du dessin que vous tracez ou que vous utilisez et les propriétés utilisée

points, droites, segments…	propriétés utilisées		
(1)	(2)	(3)	(4)

Partie réservée à l'observateur

(1) et (2) : colonnes communes aux fiches de bord du groupe et de l'observateur.
(2) : définitions, théorèmes utilisés par le groupe.
(3) : indications de la pertinence des informations situées en (1) et (2), de la cohérence des stratégies mises en œuvre.
(4) : théorème que l'élève utilise en réalité.

ANNEXE 2

La fiche synthèse qui suit tout naturellement les activités. Au cours de celles-ci l'enseignant ou les élèves auront déjà formulé les définitions ou propriétés mises en œuvre. Il s'agit alors d'institutionnaliser, mais aussi de développer les capacités d'argumentation, de communication écrite ou orale, d'anticipation, de compléter des fiches méthodes ...

Voici un plan possible de fiche synthèse.

Synthèse sur les rotations dans le plan.

Le plan est orienté avec le sens direct contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre.

Définition :

La rotation r de centre O, d'angle α exprimé en degrés ou en radians et de sens direct, est l'application du plan dans lui-même qui à O associe le point O lui-même, et qui à tout point M différent de O, associe le point M' tel que OM = OM' et α la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$ dans le sens direct.

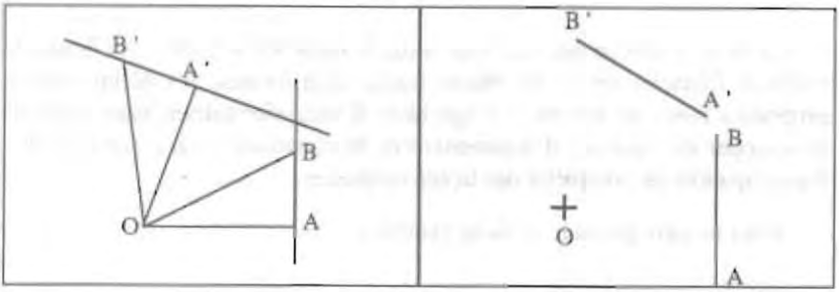
Cas particuliers :

- $\alpha = 0°$, la rotation est l'identité.
- $\alpha = 180°$, la rotation est une symétrie centrale de centre O (le point O est le milieu du segment [MM']).
- $\alpha = 90°$, la rotation est le quart de tour (configuration du triangle rectangle isocèle).
- $\alpha = 60°$ (configuration du triangle équilatéral).

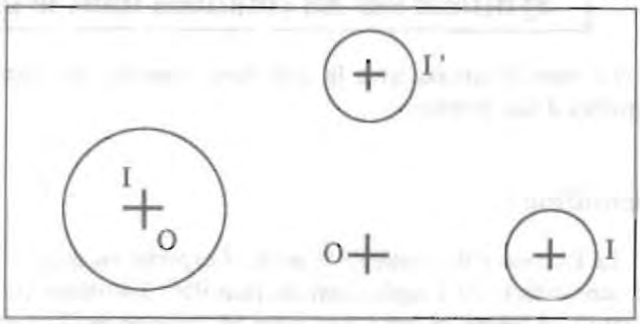
Propriétés :

Points invariants : - si $\alpha = 0°$, alors tous les points sont invariants.
- si $\alpha \neq 0°$, alors seul le centre O est invariant.

Images de figures élémentaires par la rotation :



1) La droite 2) Le segment



3) Le cercle

Effet de la rotation : conservation

1) du milieu d'un segment (le milieu d'un segment a pour image le milieu du segment image).

2) de l'alignement (les points alignés ont pour images des points alignés).

3) de la distance (la distance entre deux points est égale à la distance entre leurs images).

4) des angles (un angle a même mesure que l'angle image).

5) donc du parallélisme (les images de deux droites parallèles sont parallèles entre elles) et de l'orthogonalité (les images de deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires entre elles).

6) des aires (l'aire d'un triangle est égale à l'aire du triangle image).

Utilisation pour démontrer que :

- deux droites sont parallèles.
- des distances sont égales.
- des angles ont même mesure.
- trois points sont alignés.

ANNEXE 3

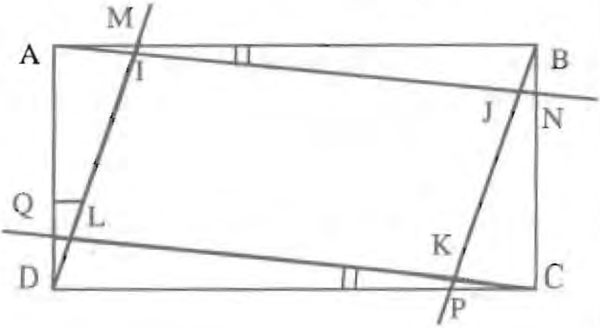
Exercices de réinvestissement (avec objectifs de référence)

Exercice 1 .

	Situations de référence. Savoir-faire
Objectif : ***Conservation de l'alignement et des distances***	
L'unité choisie est le centimètre.	
Etant donné un carré ABCD de côté 5, de centre O. Le dessiner.	
1) Placer le point M du segment [AB] tel que AM = 1.	**B19**
Placer le point N de [BC] tel que BN = 1.	
Placer le point P de [CD] tel que CP = 1.	
Placer le point Q de [DA] tel que DQ = 1.	
2) Soit la rotation *r* de centre O qui transforme A en B.	
a) Indiquer l'angle et le sens de rotation.	**B11 f IV**
b) Déterminer l'image de M par *r*.	**B11 f IV-B12 e IV-**
c) Préciser les images des points B, C, D, N, P et Q par *r*.	**B14 IV**
d) Quelle est la nature du quadrilatère (M,N,P,Q) ?	

Exercice 2.

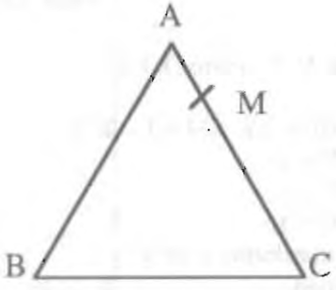
ABCD est un rectangle.	
Les angles $\widehat{BAN}$ et $\widehat{DCQ}$ sont égaux et de même sens.	
Les angles $\widehat{CBP}$ et $\widehat{ADM}$ sont égaux et de même sens.	**B7 IV-B3 IV**
Montrer que (I,J,K,L) est un parallélogramme.	



Situations de référence. Savoir-faire.

Exercice 3.

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O.
On considère M un point du segment [AC] tel que l'angle $\widehat{ABM}$ mesure 10 degrés.



Soit r la rotation de centre O et d'angle 120 degrés.
1) Construire le point N image de M par r, puis le point P image de N par r.
2) Les droites (AP) et (BM) se coupent en I, les droites (CN) et (BM) se coupent en J, les droites (AP) et (CN) se coupent en K.
Quelle est la nature du triangle (IJK) ?

B11 fIV-B12eIV-B14 IV

Exercice 4. **Démonstration de Pythagore.**

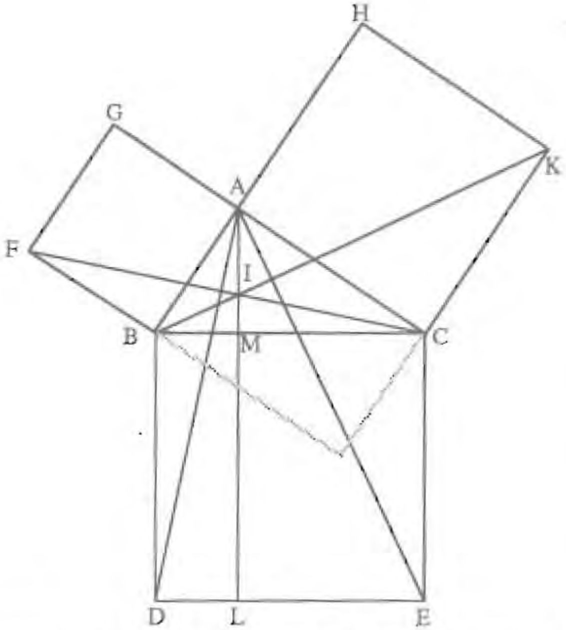
B12eIV-B14 IV

ABC est rectangle en A, A l'extérieur du triangle ABC sont construits les carrés ABFG, ACKH et BCED.

a) Justifier l'alignement des points A, C, G d'une part, B, A, H d'autre part. Comparer les aires des triangles FBA et FBC, les aires du carré ABFG et du triangle FBC.
b) Quelle est l'image de C par la rotation de centre B qui transforme F en A ? Comparer les aires des triangles FBC et ABD.

B40
B11fIV-B12eIV-B40

c) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC)



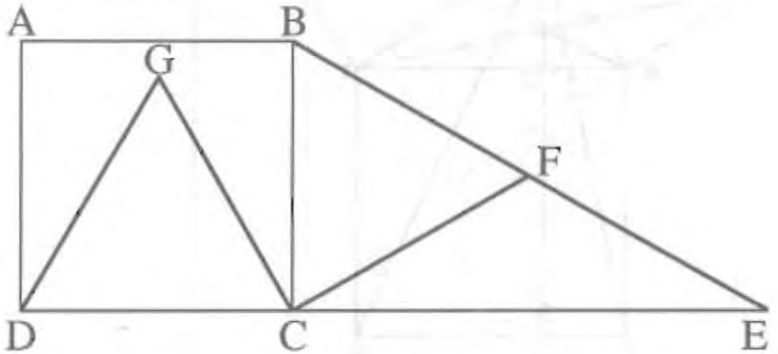
coupe (BC) en M et (DE) en L. Comparer les aires des triangles ABD et LBD.	*Situations de référence. Savoir-faire.*
d) Comparer les aires du rectangle BMLD et du carré ABFG.	B40
e) Comparer les aires : - des triangles BCK et de ACE, - du carré ACKH et du triangle BCK, - des triangles BCK et de ECA, - des triangles LEC et de AEC, - du rectangle CELM et du triangle ACKH.	B40
e) En déduire la relation bien connue : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.	B40

ANNEXE 4

Devoir : configuration et transformations

(durée 1 heure)

Le plan est orienté comme l'indique la figure ci-dessous.
(ABCD) est un carré. (BCF) et (CGD) sont deux triangles équilatéraux.
(BF) coupe (DC) en E.



Questions:	*Situations de référence. Savoir-Faire*
1° Montrer que F est le milieu du segment [BE].	BIV I-B13 dI-B7 I-B6 I
2° Soit r la rotation de centre C qui transforme F en B. Placer l'image A' de A par r.	B26
3° Quelle est la nature du triangle (AA'C) ? En déduire que les trois points A', D, B sont alignés.	B11 fI B13 dI
4° En utilisant la rotation de centre C, d'angle dont la mesure principale est $-\frac{\pi}{3}$.	
a) Montrer que les points A, G, F sont alignés.	B5 IV
b) Montrer que l'image du centre du carré (ABCD) est le milieu de [GF].	B4 IV

Grille de correction du devoir.

NOM................................	CLASSE.........................
PRENOM...........................	DEVOIR.........................

I Connaître les résultats figurant au programme.
II Elaborer un plan de solution, une stratégie.
III Argumenter.
IV Réaliser.

QUESTIONS	I	II	III	IV
1° F est le milieu de [BE]	////////			
2° Placer A' = *r(A)*	////////	////////	////////	
3° Nature du triangle (AA'C)		////////	////////	
A', D, B sont alignés	////////	////////		////////
4° a) A, G, F sont alignés		////////	////////	
b) Milieu de [GF]		////////	////////	
BILAN				

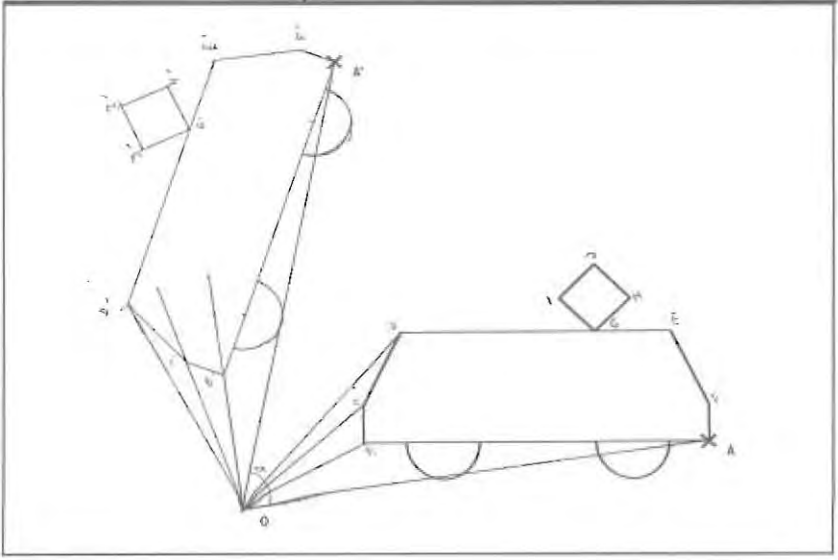
S'exprimer		Présenter	

EXEMPLE (1)

Fiche de bord concernant le thème transformations et configurations

Indiquer dans l'ordre d'exécution : les points tracés, ou les éléménts du dessin que vous tracez ou vous utilisez et les propriétés utilisées.

points, droites, segments…	propriétés utilisées…
Soit l'angle $\widehat{AOA'}$	
Je trace les images des points nommés	*soit X' l'image de X si :* $\widehat{XOX'} = \widehat{AOA'}$ *et* $OX = OX'$
E' tel que $(D'E')//(A'B')$ $D'E' = DE$	*une rotation conserve les distances. L'image de 2 droites parallèles est deux droites parallèles.*
F' tel que $(A'F')//(B'C')$ $A'F' = AF$	*voir ci-dessus.*
G' tel que $G' \in [DE]$ *et* $EG = 2,4$ *cm.*	*rotation conserve les distances.*
H' tel que $E'G'H' = 45°$ *et* $G'H' = GH$	*rotation conserve les angles et les les distances.*
I et J tels que GHIJ soit un carré	*L'image d'un carré est un carré*
demi-cercles	*L'image d'un cercle est un cercle de même rayon*



EXEMPLE (5)

Fiche de bord concernant le thème transformations et configurations

Indiquer dans l'ordre d'exécution : les points tracés, ou les éléments du dessin que vous tracez ou que vous utilisez et les propriétés utilisées.

points, droites,segments…	propriétés utilisées…
A' image de A par la rotation de centre O	*On pointe le compas en O, on mesure [OB], on trace un arc, on mesure [AB] et de A on trace*
	un arc. Les 2 arcs se coupent en B'. On fait cela pour tous les points puis il suffit de les
	rejoindre. *Une rotation conserve les distances et les pro-*
	portions. Elle tourne seulement la figure de départ.