D'une discipline à l'autre

Une modeste introduction à la transformation de Laplace.

Première partie

Daniel Lazet
Bordeaux

Cet article que nous présentons en deux parties, l'une aujourd'hui, l'autre dans le Bulletin n° 383, n'est qu'une modeste introduction à la transformation de Laplace, outil puissant dans la résolution de certains problèmes d'analyse, notamment des problèmes différentiels issus de la physique.

Les notions ici exposées sont traitées avec des moyens tout à fait artisanaux, dans un cadre limité. La transformation de Laplace générale relève de l'intégrale de Lebesgue.

L'essentiel de ce qui suit est directement issu :
-du chapitre 7 de l'ouvrage «The Laplace Transformation» de David Widder (Ed.Princeton University Press) ;
-et du chapitre 4 de l'ouvrage «Advanced engineering mathematics» de Stanley Grossman et William Derrick (Ed.Harper and Row, New York).

Pierre Simon LAPLACE

(1749-1827)

Pierre-Simon LAPLACE est né en 1749 dans une famille pauvre. Très jeune, il montra des dons exceptionnels pour les mathématiques. Ses plus célèbres travaux concernent la mécanique céleste, les équations différentielles et aux dérivées partielles, le calcul des probabilités. Son « *Traité de mécanique céleste* » (en cinq volumes, 1799-1825) et sa «*Théorie analytique des probabilités* » (1812) resteront des œuvres majeures dans l'histoire des mathématiques. Chacune d'elles commence par un copieux exposé non-technique où il dégage la philosophie de son travail.

Ce que l'on appelle aujourd'hui la "transformation de Laplace" est un outil dont il eut l'idée au cours de ses recherches sur les équations différentielles. Cet outil devint plus tard la clef du calcul opérationnel d'Heaviside.

Laplace était très généreux envers les chercheurs débutants. Plusieurs fois, il retarda la publication d'une découverte personnelle, afin de laisser la primauté à un jeune chercheur qu'il savait sur le point de parvenir à des résultats semblables aux siens.

1-La transformation de Laplace comme généralisation des séries entières :

Une série entière se présente sous la forme $\sum_{n\in \mathbf{N}} a_n X^n$. Lorsqu'elle converge, on peut noter F(X) sa somme, et écrire : $F(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

On peut regarder cette formule comme «l'aspect discret» d'un problème dont «l'aspect continu» est : $F(X) = \int_0^{+\infty} a(t).X^t.\mathrm{d}t$. (On prend donc $X \in \mathbf{R}_+^*$)

En posant $X = e^{-x}$ ($x \in \mathbf{R}$), cela s'écrit $F(e^{-x}) = \int_0^{+\infty} a(t).e^{-xt}.\mathrm{d}t$

Ainsi, étant donné une fonction f définie (au moins) sur $]0\ ,\ +\infty[$ on est conduit à s'intéresser, pour $x \in \mathbf{R}$, à l'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t).\mathrm{d}t$.

Pour que le problème de la convergence de cette intégrale ait un sens, il faut que f soit localement intégrable sur $]0\ ,\ +\infty[$ (c'est à dire intégrable sur tout intervalle compact inclus dans $]0\ ,\ +\infty[$). C'est notamment le cas si f est réglée, c'est-à-dire n'a que des points de discontinuité de première espèce, sur $]0\ ,\ +\infty[$. Dans la pratique, les fonctions rencontrées étant quasiment toujours des fonctions réglées, nous nous plaçons dans le cadre de ces fonctions.

2-Définition :

Préliminaire :

Etant donné une fonction f réelle et réglée sur $]0\ ,\ +\infty[$, alors l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t).\mathrm{d}t$ soit absolument convergente (en abrégé : AC) est ou vide, ou un intervalle du type $[a\ ,\ +\infty[$ ou $]a\ ,\ +\infty[$ ($a \in \mathbf{R}$ ou $a = -\infty$).

En effet, il suffit de prouver que si pour $x_0 \in \mathbf{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-x_0 t} f(t).dt$ est AC,

alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \geq x_0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t).dt$ est aussi AC.

Or, pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a

$$\left|e^{-xt}.f(t)\right| = e^{-xt}.|f(t)| \leq e^{-x_0 t}.|f(t)| = \left|e^{-x_0 t}.f(t)\right| \quad .$$

Et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left|e^{-x_0 t}.f(t)\right|.dt$ étant convergente, cette inégalité implique

la convergence de $\int_0^{+\infty} \left|e^{-xt}.f(t)\right|.dt$. D'où la

Définition :

Etant donné une fonction réelle f réglée sur $]0, +\infty[$, on appelle transformée de Laplace de f la fonction de variable réelle notée $\mathcal{L}(f)$ ou $\widehat{f}$ telle que : $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t).dt$.

Bien sûr, on ne considèrera que les fonctions f pour lesquelles l'ensemble de définition de $\mathcal{L}(f)$ n'est pas vide. Il sera donc du type $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

On écrira $(a, +\infty[$ pour représenter indifféremment $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Remarques :

a) Etant donné une fonction f réglée sur $]0, +\infty[$, on pourrait plus généralement s'intéresser aux $x \in \mathbf{R}$ pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t).dt$ est convergente sans être nécessairement absolument convergente. Mais alors l'application $\mathcal{L}(f)$ qui en découlerait serait d'un maniement très délicat (la plupart des théorèmes ci-après ne seraient plus vrais), son ensemble de définition ne serait plus nécessairement un intervalle. En outre, dans les problèmes pratiques, elle ne serait plus un outil efficace.

b) Nous définissons ici la transformation de Laplace dans le champ réel, car nous ne visons qu'à une simple prise de contact avec cette théorie. La transformée de Laplace véritable $\mathcal{L}(f)$ d'une fonction f réglée sur $]0\,,+\infty[$ est une fonction de variable complexe définie par $\mathcal{L}(f)\,(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t).dt$. Et si $I = (a\,,+\infty[$ est l'intervalle réel sur lequel $\mathcal{L}(f)_{/\mathbb{R}}$ est définie, alors $\mathcal{L}(f)\,(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle vérifie $\mathcal{R}e\,(z) > a$ (car pour un tel z, la fonction réelle $t \to |\, e^{-zt} f(t)\,|$ donne une intégrale convergente sur $]0\,,+\infty[$).

3-Intérêt principal de la transformation de Laplace :

Nous verrons que la transformation de Laplace permet de ramener la résolution de certains types d'équations différentielles, ou systèmes différentiels, (fréquents en physique) à la résolution d'équations algébriques (ou systèmes d'équations algébriques).

La démarche est alors la suivante :
- On applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle donnée, où l'inconnue est une fonction f (bien sûr lorsque $\mathcal{L}(f)$ existe) ;
- on résout l'équation algébrique qui en découle. Cette équation est d'inconnue $\mathcal{L}(f)$. On obtient donc $\mathcal{L}(f)$;
- connaissant $\mathcal{L}(f)$, il faut alors en déduire f. C'est *le problème de l'inversion de la transformation de Laplace, que nous verrons dans la Seconde P, au Bulletin n°383 artie*

4-Quelques exemples de transformées de Laplace :

On vérifie aisément les résultats suivants :

$f(t)$	e^{at} ($a \in \mathbb{R}$)	c (constante réelle)	t^n ($n \in \mathbb{N}^*$)
$\mathcal{L}(f)\,(x)$	$\dfrac{1}{x-a}$	$\dfrac{c}{x}$	$\dfrac{n!}{x^{n+1}}$
Ens. de déf. de $\mathcal{L}(f)$	$]a\,,+\infty[$	$]0\,,+\infty[$	$]0\,,+\infty[$

$f(t)$	$\sin(at)$	$\cos(at)$	$\mathrm{sh}(at)$	$\mathrm{ch}(at)$
$\mathcal{L}(f)(x)$	$\frac{a}{x^2+a^2}$	$\frac{x}{x^2+a^2}$	$\frac{a}{x^2-a^2}$	$\frac{x}{x^2-a^2}$
Ens. de déf. de $\mathcal{L}(f)$	$]0\,,+\infty[$	$]0\,,+\infty[$	$]\,\lvert a\rvert\,,+\infty[$	$]\,\lvert a\rvert\,,+\infty[$

Convention d'usage : souvent on écrit $\mathcal{L}(f(t))$ au lieu de $\mathcal{L}(f)$.

Ainsi, on écrira $\mathcal{L}(t^n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$, ou $\mathcal{L}(\cos at)(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$

5-Principales propriétés de la transformation de Laplace :

5.1-Condition suffisante d'existence :

> Si f est réglée sur $[0\,,+\infty[$ et s'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{ct})$, alors $\mathcal{L}(f)$ est définie au moins sur l'intervalle $]c\,,+\infty[$.

En effet, $f(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{ct})$ signifie : il existe $A \in \mathbf{R}_+$, il existe $M \in \mathbf{R}_+^*$ tels que pour tout $t \in\,]A\,,+\infty[$, on ait : $|f(t)| \leq M.e^{ct}$.

Alors, pour tout $x \in\,]c\,,+\infty[$, la fonction $t \to e^{-xt}.f(t)$ est réglée sur $[0\,,+\infty[$ (car f l'est) donc elle l'est sur $[A\,,+\infty[$.

Et sur $[A\,,+\infty[$ on a : $|e^{-xt}.f(t)| \leq M.e^{-(x-c).t}$.

Or $(x-c) \in \mathbf{R}_+^*$, donc l'intégrale impropre $\int_A^{+\infty} e^{-(x-c)t}.\,dt$ est convergente. Donc l'intégrale impropre $\int_A^{+\infty} e^{-xt}.f(t).\,dt$ est AC.

En outre, l'intégrale $\int_0^A |e^{-xt} f(t)|\, dt$ est elle aussi convergente puisque f est réglée sur $[0, A]$. D'où le résultat annoncé.

5.2-Linéarité de la transformation de Laplace :

Théorème 1 : Si f et g sont réglées sur $]0, +\infty[$, si leurs tranformées de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ sont définies sur $(a, +\infty[$, alors, quel que soit $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet une transformée de Laplace définie (au moins) sur $(a, +\infty[$, et on a : $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) : \lambda.\mathcal{L}(f) + \mu.\mathcal{L}(g)$

La preuve est immédiate.
Cette propriété servira notamment pour l'inversion de la transformation : si F et G sont des fonctions définies sur $(a, +\infty[$ qui sont respectivement transformées de Laplace de f et g. Alors quel que soit $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $\lambda F + \mu G$ est la transformée de Laplace de $\lambda f + \mu g$.

5.3-Transformation de Laplace et translation sur la variable :

a) **Théorème 2:** Soit f une fonction réelle réglée sur $]0, +\infty[$, admettant une transformation de Laplace $\mathcal{L}(f)$ définie sur $(a, +\infty[$. Alors, quel que soit $\delta \in \mathbf{R}$, la fonction $t \to e^{\delta t}\ f(t)$ a pour transformée de Laplace : $x \to \mathcal{L}(f)\,(x - \delta)$ (pour $x \in (a + \delta, +\infty[$).
On écrira : $\mathcal{L}(e^{\delta t}.\, f(t))(x) = \mathcal{L}(f)\,(x - \delta)$.

La preuve est immédiate.
Cette propriété sera également très utile dans les problèmes d'inversion de la transformation.

Exemple : la fonction $x \to \dfrac{n!}{(x - \delta)^{n+1}}$ (pour $x \in\ ]\delta, +\infty[$) est la transformée de Laplace de : $t \to e^{\delta t}.t^n$ (cf.4).

b) **Fonction de Heaviside :**

C'est la fonction H définie par $\left|\begin{array}{l} H(t) = 0 \text{ sur }]-\infty, 0[\\ H(t) = 1 \text{ sur }]0, +\infty[\end{array}\right.$

Pour $H(0)$, on prend la valeur qu'on veut.

Pour tout $\delta \in \mathbf{R}$, on note (de façon abusive encore) $H(t - \delta)$ la fonction telle que : $H(t-\delta)=0$ sur $]-\infty\,,\,\delta[$, $H(t-\delta)=1$ sur $]\delta\,,+\infty[$, $H(\delta)$ ayant la valeur qu'on veut.

La restriction de $H(t-\delta)$ à $]0\,,+\infty[$ est donc une fonction réglée, et on vérifie aisément que : $\forall\,\delta\in\mathbf{R}_+,\ \forall\,x\in\,]0\,,+\infty[\,,\ \mathcal{L}(H(t-\delta))(x)=\dfrac{e^{-\delta x}}{x}$

En effet, $\mathcal{L}(H(t-\delta))(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}.H(t-\delta).\mathrm{d}t=\int_\delta^{+\infty}e^{-xt}.\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-\delta x}}{x}$

c) **Théorème 3 :** Soit f une fonction réelle réglée sur $]0\,,+\infty[$, admettant une transformée de Laplace définie sur $(a\,,+\infty[$. Alors, quel que soit $\delta\in\mathbf{R}_+$ on a :
$\forall\,x\in(a\,,+\infty[\,,\ \mathcal{L}(f(t-\delta).H(t-\delta))(x)=\mathrm{e}^{-\delta x}.\mathcal{L}(f)(x)$.

Preuve :

$$\mathcal{L}(f(t-\delta).H(t-\delta))(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}.f(t-\delta).H(t-\delta).\mathrm{d}t=\int_\delta^{+\infty}e^{-xt}.f(t-\delta).\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $t\to\theta=t-\delta$ est possible dans l'intégrale puisqu'il est affine. On obtient :

$$\int_\delta^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}.f(t-\delta).\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x(\theta+\delta)}f(\theta).\mathrm{d}\theta=\mathrm{e}^{-\delta x}.\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\theta}f(\theta).\mathrm{d}\theta$$
$$=\mathrm{e}^{-\delta x}.\mathcal{L}(f)(x).$$

Ici encore, on a un résultat intéressant pour l'inversion de la transformation.

Exemple : soit la fonction $x\to\dfrac{a.\mathrm{e}^{-bx}}{x^2+a^2}$ $(a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R}_+,\ x>0)$. On sait d'après 4 que : $\mathcal{L}(\sin af)(x)=\dfrac{a}{x^2+a^2}$. Donc $x\to\dfrac{a.\mathrm{e}^{-bx}}{x^2+a^2}$ est la transformée de Laplace de $t\to\sin(a(t-b)).H(t-b)$.

5.4-Transformation de Laplace et différenciation :

a) **Théorème 4 :** Si f est une fonction réelle dérivable sur $[0\,,+\infty[$ et si f' est continue sur $]0\,,+\infty[$, et s'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{ct})$

Alors $\mathcal{L}(f')$ est définie sur $]c\,,+\infty[$ et on a :
$\mathcal{L}(f')(x) = x.\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

Preuve :

$\displaystyle\int_\varepsilon^X e^{-xt}.f'(t).dt = \left[e^{-xt}f(t)\right]_\varepsilon^X + x.\int_\varepsilon^X e^{-xt}.f(t).dt$, (intégration par parties possible sur $[\varepsilon\,,X]$ car f' est continue sur $[\varepsilon\,,X]$, en prenant bien sûr $0<\varepsilon<X$).

D'où : $\displaystyle\int_\varepsilon^X e^{-xt}.f'(t).dt = e^{-xX}.f(X) - e^{-x\varepsilon}.f(\varepsilon) + x.\int_\varepsilon^X e^{-xt}.f(t).dt$.

On a $f(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{ct})$. Donc il existe $A \in \mathbf{R}_+$ et $M \in \mathbf{R}_+$ tels que $\forall x \geq A$,

$|f(x)| \leq M.e^{cX}$. Donc, pour $X \geq A$, $|e^{-xX}f(x)| \leq M.e^{-(x-c)X}$. De là, si $x > c$, $\lim\limits_{X \to +\infty}(e^{-xX}.f(X)) = 0$

En outre : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+}(e^{-x\varepsilon}.f(\varepsilon)) = f(0)$ (car f continue en 0, puisque dérivable sur $[0\,,+\infty[$).

Conclusion : $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0+, X \to +\infty}\left(\int_\varepsilon^X e^{-xt}.f'(t).dt\right) = x.\int_0^{+\infty} e^{-xt}.f(t).dt - f(0)$

(CQFD).

En raisonnant par récurrence, on obtient :

Théorème 4' : Si f est une fonction réelle n fois dérivable sur $[0\,,+\infty[$, et si $f^{(n)}$ est continue sur $]0\,,+\infty[$, et s'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f^{(n-1)}(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{ct})$. Alors $\mathcal{L}(f^{(n)})$ existe sur $]c\,,+\infty[$, et on a :

$\mathcal{L}(f^{(n)})(x) = x^n.\mathcal{L}(f)(x) - x^{n-1}f(0) - x^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

Exemples d'utilisation de ce théorème.

(1) *Calcul de* $\mathcal{L}(\sin^2 a\,t)$:

Posons $f(t) = \sin^2 at$. D'où $f'(t) = 2a \sin(at).\cos(at) = a.\sin(2at)$.

Donc : $\mathcal{L}(f')(x) = \dfrac{2a^2}{x^2 + 4a^2}$ pour $x > 0$ (cf.4).

Le théorème 4 est alors applicable sur $]c\,,+\infty[$ quel que soit $c \in \mathbf{R}_+^*$. De là, sur $]0\,,+\infty[$, on peut écrire :

$$\mathcal{L}(f')(x) = x.\,\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

$$\frac{2a^2}{x^2 + 4a^2} = x.\mathcal{L}(f)(x)$$

D'où $\mathcal{L}(f)(x) = \dfrac{2a^2}{x.(x^2 + 4a^2)}$ (pour $x \in\,]0\,,+\infty[$).

(2) *Résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :*

On souhaite résoudre : $y'' - 3y' + 2y = 4t - 6$ avec $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.
La fonction $t \to 4t - 6$ est continue sur l'intervalle $\mathbf{R}$. Donc le théorème de Cauchy-Lipschitz (ou la théorie des équations différentielles linéaires) implique l'existence et l'unicité d'une solution f à l'équation différentielle, définie sur $\mathbf{R}$, et satisfaisant aux conditions initiales données.

➠ La fonction f est 2 fois dérivable sur $\mathbf{R}$, donc elle l'est sur $[0\,,+\infty[$.
On a $f''(t) = 3f''(t) - 2f(t) + 4t - 6$ sur $\mathbf{R}$; donc f'' est dérivable sur $\mathbf{R}$.
➠ A fortiori, f' est continue sur $[0\,,+\infty[$.
➠ S'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que : $f' \underset{+\infty}{=} O(e^{c\,t})$, le théorème 4' permet d'écrire sur

$]c\,,+\infty[$ $\qquad \mathcal{L}(f'')(x) = x^2.\mathcal{L}(f)(x) - x.f(0) - f' = x^2\mathcal{L}(f)(x) - x - 3$

$\qquad\qquad \mathcal{L}(f')(x) = x.\mathcal{L}(f)(x) - f(0) = x.\mathcal{L}(f)(x) - 1.$

Donc, sur $]a\,,+\infty[$ (en prenant $a = \max(0, c)$) grâce à la linéarité de $\mathcal{L}$, on a :

$x^2.\mathcal{L}(f)(x) - x - 3 - 3x.\mathcal{L}(f)(x) + 3 + 2\mathcal{L}(f)(x) = 4\mathcal{L}(t)(x) - 6\mathcal{L}(1)(x)$

c'est à dire : $\qquad (x^2 - 3x + 2).\mathcal{L}(f)(x) = x + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x}$

$$(x-1)(x-2).\mathcal{L}(f)(x) = \frac{x^3 - 6x + 4}{x^2}$$

De là, sur $]a\,,+\infty[\setminus\{1,2\}$, $\mathcal{L}(f)\,(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x^2\,(x-1)} = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x-1}$

Or (cf.**4**)

$$\left|\begin{array}{ll} \mathcal{L}(e^t)\,(x) = \dfrac{1}{x-1} & \text{sur }]1\,,+\infty[\\[2ex] \mathcal{L}(2t)\,(x) = \dfrac{2}{x^2} & \text{sur }]0\,,+\infty[\end{array}\right.$$

Donc (par linéarité de $\mathcal{L}$) : $\mathcal{L}(e^t+2t)\,(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x-1}$ sur $]1\,,+\infty[$.

Conclusion : au moins sur $]2\,,+\infty[$, on a : $\mathcal{L}(f)\,(x) = \mathcal{L}(e^t+2t)\,(x)$
D'après le théorème d'inversion de $\mathcal{L}$ (voir **6** , *Bulletin* n°383, 2ème partie) on peut en déduire que sur $]2\,,+\infty[$ au moins, on a : $f\,(t) = e^t + 2t$.

Mais sans utiliser ce théorème, on vérifie directement que la fonction obtenue, ici $t \to e^t + 2t$, satisfait à l'équation différentielle donnée au départ, conditions initiales comprises. Donc, c'est *la* solution cherchée (puisqu'on savait qu'elle était unique). Et la vérification se fait pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Remarque :
On voit dans cet exemple la démarche, généralement suivie, pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants par la transformation de Laplace :

1) On suppose l'existence d'une solution répondant aux conditions initiales données, ou on prouve son existence par les théorèmes généraux sur les équations différentielles.
2) On suppose qu'à cette solution f et à ses dérivées on peut appliquer l'opérateur de Laplace $\mathcal{L}$.
3) On transforme l'équation différentielle au moyen de $\mathcal{L}$.
4) On obtient une équation algébrique d'inconnue $\mathcal{L}(f)$, que l'on résout.
5) Connaissant $\mathcal{L}(f)$, on en tire un f possible (par utilisation des propriétés de $\mathcal{L}$ et des transformées de Laplace des fonctions usuelles).
6) On examine alors si le f ainsi obtenu est bien solution du problème différentiel de départ.

b) **Théorème 5 :** Si f est une fonction réelle réglée sur $]0\ ,\ +\infty[$ et s'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} e^{-ct}.f(t).dt$ soit AC, alors $\mathcal{L}(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]c\ ,\ +\infty[$, et on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{d^n \mathcal{L}(f)}{dx^n} = (-1)^n.\mathcal{L}\left(t^n.f(t)\right).$$

Preuve : Nous écrirons ici $\widehat{f}$ au lieu de $\mathcal{L}(f)$

➡ *Pour* $n = 1$: soit $x \in]c\ ,\ +\infty[$, soit $h \in \mathbf{R}$ tel que $x + h \in [c\ ,\ +\infty[$.

On a : $$\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-(x+h).t} - e^{-xt}\right).f(t).dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-xt}.\left(e^{-ht} - 1\right).f(t).dt$$

D'après Taylor-Lagrange, il existe $\alpha_h \in [0\ ,\ 1]$ tel que :

$$e^{-ht} - 1 = -ht + \frac{h^2 t^2}{2} e^{-\alpha_h h t} \quad (\alpha_h \text{ dépend de } h \text{ et } t).$$

D'où :

$$\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x) = h.\int_0^{+\infty} -t\ .\ e^{-xt}.f(t).dt + \frac{h^2}{2}.\int_0^{+\infty} t^2.e^{-(x+\alpha_h h)t}.f(t).dt \quad (*)$$

Remarque : de l'hypothèse «il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} e^{-ct}.f(t).dt$ soit AC», on déduit aussitôt que pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour tout $x > c$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n.e^{-xt}.f(t).dt$ est AC.

Posons $u = \frac{c+x}{2}$, et prenons $h \in \mathbf{R}$ tel que $|h| \leq \frac{x-c}{2}$.

On a alors : $x + \alpha_h h \geq u$.

Donc : $\left|t^2.e^{-(x+\alpha_h h).t}.f(t)\right| \quad \left|t^2.e^{-ut}.f(t)\right|$.

Or (d'après la remarque) : $\int_0^{+\infty} t^2.e^{-ut}.f(t).dt$ est AC.

On peut ainsi poser : $L_x = \int_0^{+\infty} |t^2.e^{-ut}.f(t)|.dt$

D'où $\left| \frac{h^2}{2} \cdot \int_0^{+\infty} t^2.e^{-(x+\alpha_h.h).t}.f(t).dt \right| \leq \frac{h^2}{2}.L_x$

Ce qui implique : $\frac{h^2}{2} \cdot \int_0^{+\infty} t^2.e^{-(x+\alpha_h.h).t}.f(t).dt = O(h)$

Et alors, la relation (*) signifie: $\widehat{f}'(x)$ existe et $\widehat{f}'(x) = \int_0^{+\infty} -t.e^{-xt}.f(t).dt$,

c'est à dire : $\frac{d\,\mathcal{L}(f)}{dx}(x) = -\mathcal{L}(t.(f(t)))(x)$ (pour $x \in]c, +\infty[$)

Le théorème 5 est donc démontré pour $n = 1$.

➡ En appliquant alors ce raisonnement à la fonction $t \to -t.f(t)$ au lieu de l'appliquer à f, on obtient que $\widehat{f}'$ est dérivable sur $]c, +\infty[$,

et que $\forall x \in]c, +\infty[$, $\widehat{f}'' = \int_0^{+\infty} t^2.e^{-xt}.f(t).dt$ c'est à dire

$\frac{d^2\,\mathcal{L}(f)}{dx^2} = \mathcal{L}\{t^2.f(t)\}$

➡ *Et en itérant :* $\widehat{f}'$ est infiniment dérivable sur $]c, +\infty[$, et

$\frac{d^n\,\mathcal{L}(f)}{dx^n} = (-1)^n.\mathcal{L}\{t^n.f(t)\}$ (Cqfd).

5.5-Transformée de Laplace d'une fonction périodique :

Théorème 6 : Si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, de période $T > 0$, alors la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ existe sur $]0, +\infty[$, et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\int_0^T e^{-xt}.f(t).dt}{1 - e^{-xT}}.$$

Preuve : soit $x \in]0, +\infty[$. Pour tout $X \in \mathbf{R}_+$, on a :

$$\int_0^T e^{-xt} f(t).dt = \int_0^{kT} e^{-xt} f(t).dt + \int_{kT}^X e^{-xt} f(t).dt$$ (avec k, partie entière de X/T)

Or, $\int_{jT}^{(j+1)T} e^{-xt} f(t).dt = \int_0^T e^{-xjT}.e^{-x\theta} f(\theta).d6$ (changement de variable $t = jT + \theta$, et $j \in \mathbf{N}$)

$$= e^{-xjT}. \int_0^T e^{-xjT}.e^{-x\theta} f(\theta).d\theta .$$

Posons $A = \int_0^T e^{-x\theta} f(\theta).d\theta$

Alors $\int_0^T e^{-xt} f(t).dt = A . \sum_{j=0}^{k-1} (e^{-xT})^j + \int_{kT}^X e^{-xt} f(t).dt$

$$= A . \frac{1-(e^{-xT})^k}{1-e^{-xT}} + \int_{kT}^X e^{-xt} f(t).dt \qquad ❐$$

Puisque f est continue sur $\mathbf{R}$, il existe $M = \sup_{[0,T]} (|f|)$ (donc $M = \sup_{\mathbf{R}} (|f|)$ car T est période de f).

De là : $\left| \int_{kT}^X e^{-xt}.f(t).dt \right| \leq M . \int_{kT}^X e^{-xt}.dt = \frac{M}{x}\left[e^{-xkT} - e^{-xX}\right]$ ❀

Lorsque X tend vers $+\infty$, k tend aussi vers $+\infty$. Donc, puisque $x > 0$ et $T > 0$,

❀ entraîne : $\lim_{X \to +\infty} \left(\int_{kT}^X e^{-xt} f(t).dt \right) = 0$

Et alors découle de ❐ $\lim_{X \to +\infty} \left(\int_0^X e^{-xt} f(t).dt \right) = A . \frac{1}{1-e^{-xT}}$ (C.Q.F.D.)

5.6- Transformation de Laplace et produits :

Rappel : Si f et g sont des fonctions réglées sur $[0\ ,+\infty]$, on appelle produit de convolution de f et g la fonction notée $f*g$ définie sur $[0\ ,+\infty[$ par : $f*g = \int_0^x f(x-t).g(t).dt$

Alors, on prouve aisément le théorème suivant :

Théorème 7 : Si f et g sont des fonctions réelles réglées sur $[0\ ,+\infty[$, admettant des transformées de Laplace définies sur $(a\ ,+\infty[$, alors la fonction $f*g$ admet aussi une transformation de Laplace définie sur $(a\ ,+\infty[$, et on a : $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f).\mathcal{L}(g)$.

Exemple d'utilisation de ce théorème :

On cherche f telle que $\mathcal{L}(f)(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

On sait que (cf.4) : $\mathcal{L}(\cos)(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $\mathcal{L}(\sin)(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

pour $x \in]0\ ,+\infty[$

On a donc $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\sin)\ .\ \mathcal{L}(\cos)$.

D'après le théorème 7, on peut donc dire que si $f = \sin*\cos$, on a

$\mathcal{L}(f)(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ (pour $x \in]0\ ,+\infty[$)

Déterminons $\sin*\cos$: $(\sin*\cos)(u) = \int_0^u \sin(u-t).\cos t.dt$

$$\text{Soit } f(u) = \int_0^u \left(\sin u.\cos^2 t - \sin t.\cos u.\cos t\right).dt$$

$$= \sin(u).\int_0^u \cos^2 t.dt - \frac{\cos u}{2}.\int_0^u \sin(2t).dt$$

$$= \sin(u).\int_0^u \frac{1+\cos 2t}{2}.dt - \frac{\cos u}{2}.\int_0^u \sin(2t).dt$$

$$= \quad \sin(u).\left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right] - \frac{\cos u}{2} . \left[- \frac{\cos 2u}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

$$f(u) \quad = \quad \frac{u.\sin(u)}{2}$$

Conclusion : la fonction f définie sur $[0\ ,+\infty]$ par $f(u) = \dfrac{u.\sin(u)}{2}$ admet pour transformée de Laplace la fonction définie sur $]0\ ,+\infty[$ par $x \to \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

La suite de cet article paraîtra dans le numéro 383