Dans nos classes

Initiation à la démonstration...dès la 6ème...

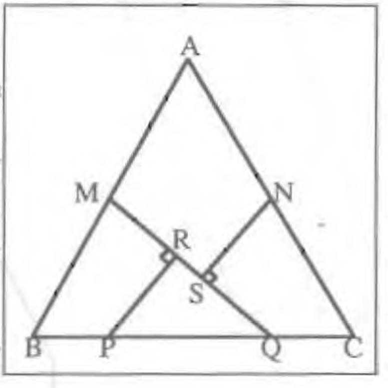
Mireille Picard

Voici une situation qui présente un double avantage :
- La nécessité de prouver est facile à susciter,
- La démonstration est à la portée des connaissances d'un élève de 6ème.

Et puis, la situation est évolutive car elle permet de soulever le problème des hypothèses : dans quelle mesure peut-on les modifier sans changer la teneur du problème ?

Hypothèses :

ABC équilatéral de côté 8 cm (la figure ci-contre est en réduction)
M, milieu de [AB], N milieu de [AC],
BP = QC = 2 cm,
[PR] $\perp$ [MQ] ; [NS] $\perp$ [MQ].
On découpe les quatre pièces, transformant ainsi la figure en puzzle.



Problème : en utilisant les quatre pièces, reconstituer une figure «connue».

Au fil des années, j'ai soumis de problème à plusieurs classes, et les figures «connues» qui ont surgi sont les suivantes : un *rectangle* qui a l'air d'un carré, un *trapèze rectangle* , un *trapèze quelconque*.

Mais la production des élèves ne s'arrête pas là : les octogones, heptagones, hexagones, en général non convexes, fleurissent. Il y a aussi des illusions de trapèze...

I-Mise en œuvre pédagogique :

❶ D'abord un problème de construction géométrique, non négligeable en 6ème. On peut formuler les hypothèses dans un énoncé exclusivement sous forme de texte.

❷ L'identification des quatre pièces (triangle rectangle, quadrliatère,...).

❸ Les élèves trouvent en général d'abord le «carré», et bloquent ensuite. Pour les aider, on peut leur dire qu'«on peut passer d'une figure à l'autre en ne déplaçant qu'une pièce».

II-La phase démonstration :

➡ Pour chaque figure, apporter les preuves des propriétés suivantes :
- elles ont bien 4 côtés (et non pas 8) - (travail sur les angles).
- à l'intérieur, il n'y a ni trou, ni chevauchement.

➡ La démonstration que le rectangle n'est pas un carré ne peut pas se faire, me semble-t-il avant la 4ème. La réponse reste donc en suspens en 6ème. Mais c'est le moment de convaincre l'auditoire que mesurer les côtés n'a pas valeur de preuve.

➡ Par contre, la démonstration concernant le trapèze rectangle est en concordance parfaite avec le programme de 6ème (deux droites perpendiculaires à une même troisième).

➡ Celle concernant le trapèze quelconque fait appel à un théorème vu seulement en 5ème (angles intérieurs supplémentaires, d'où droites parallèles)... mais ce n'est qu'après tout une extension du théorème précédent.

III-La phase modification de l'énoncé.

Par mise en relation des hypothèses et de leurs conséquences sur les figures, on détermine celles qui sont incontournables pour obtenir les trois quadrilatères.

On pourrait arriver au problème suivant :

> ABC triangle quelconque,
> M milieu de [AB], N milieu de [AC],
> $P \in [BC]$, $Q \in [BC]$, $BQ + QC = PQ$,
> $R \in [MQ]$, $[PR] \perp [MQ]$; $S \in [MQ]$; $[NS] \perp [MQ]$.

Il faudrait encore éviter que R et S soient à l'extérieur du triangle. A vous de peaufiner les hypothèses.

exemple : $BC = 10$; $BA = 9$; $AC = 7$; $BP = 2$; $QC = 3$.

Les trois quadrilatères nous reviennent. Seulement le rectangle n'a plus l'air d'un carré et perd ainsi de son mystère.