# Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

*Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.*

*Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher "de beaux problèmes" ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.*

*Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante :*

*M.Dominique ROUX*
*52, cours Gay-Lussac*
*87000 LIMOGES*

*(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.).*

## ÉNONCÉS

**ÉNONCÉ N°187** (D'après S.LECLERC , 1674)

Construire à la règle et au compas un carré aussi grand que possible à l'intérieur d'un pentagone régulier donné.

**ÉNONCÉ N°188** (CONCOURS GENERAL 1990)

Déterminer tous les nombres naturels $n$ tels qu'il existe $n$ nombres entiers naturels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, distincts ou non vérifiant : $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}$.

**ÉNONCÉ N°189** (OLYMPIADES INTERNATIONALES 1990)

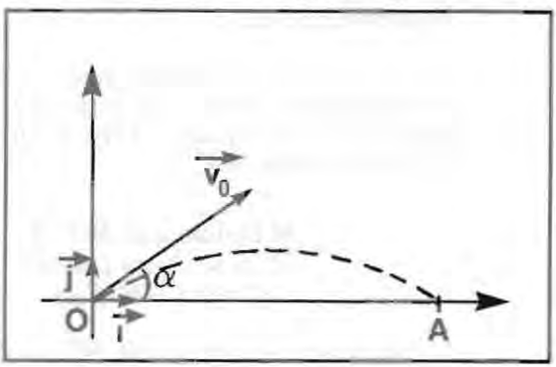
Quels sont tous les entiers $n$ tels que $n^2$ divise $2^n + 1$ ?

## SOLUTIONS

**ÉNONCÉ N°172** (Compétition PUTNAM)

Un projectile lancé du sol, dans une direction faisant un angle $\alpha$ avec le sol que l'on suppose plat et horizoutal, se déplace sous l'action de la seule force de gravité puis tombe sur le sol. Pour quel angle $\alpha$ l'arc de parabole a-t-il une longueur maximale ?

**SOLUTION** de Dominique FAVIER (Retouruac)




* On appelle $\vec{v_0}$ la vitesse initiale du projectile. De plus l'angle $\alpha$ appartient à $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

L'instant initial étant celui où le projectile part, et l'origine du repère étant le point de départ du projectile, le mouvement est régi par la fonction vectorielle F telle que :

$$F(t) = \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t \end{cases}$$

* Le point A où le projectile atteint le sol correspond à la valeur $t_A$ du paramètre pour laquelle $\begin{cases} y(t_A) = 0 \\ t_A \neq 0 \text{ c'est à dire : } -\frac{1}{2} g t_A + v_0 \sin\alpha = 0 \end{cases}$

d'où $\boxed{T_A = \dfrac{2vo \sin\alpha}{g}}$

* *Calcul de la longueur de l'arc de courbe .*
Il sufit d'appliquer le théorème (qui s'applique bien dans ce cas) :

> Soit F une fonction vectorielle dérivable et à dérivée continue sur $[a ;b]$ .
> La longueur de l'arc de courbe défini par F est égale à
> $$\int_a^b \left\| \overrightarrow{F'(t)} \right\| dt$$
> où $a$ et $b$ sont les valeurs du paramètre correspondant aux extrêmités de l'arc.

on calcule donc :

$$\int_0^{t_A} \sqrt{v_0^2 \cos^2(\alpha) + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}\, dt$$

puisque $\vec{F'}(t) = \begin{cases} x'(t) = v_0 \cos\alpha \\ y'(t) = v_0 \sin a - gt \end{cases}$

On effectue un changement de variables en posant :
$v_0 \sin\alpha - g\, t = v_0 \cos\alpha \operatorname{sh} u$ (1) (la nouvelle variable est $u$)..

Ainsi : $dt = -\dfrac{v_0 \cos\alpha}{g} \operatorname{ch} u\, du$ et les bornes d'intégration sont remplacées respectivement par $u_0 = \operatorname{argsh}(\tan\alpha)$ et $u_A = -\operatorname{argsh}(\tan\alpha)$ puisque l'on déduit de (1) que $u = \operatorname{argsh}\left(\tan\alpha - \dfrac{g\, t}{v_0 \cos\alpha}\right)$.

Par suite :

$$\int_0^{t_A} \left\| \vec{F'}(t) \right\| dt = \int_{u_0}^{u_A} \sqrt{V_0^2 \cos^2(\alpha)\,(1 + \operatorname{sh}^2(u))} \times \frac{-v_0 \cos\alpha}{g} \operatorname{ch} u\, du$$

$$= -\frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \int_{u_0}^{u_A} (\text{ch}u)^2 \, du$$

car $\sqrt{1 + \text{sh}^2(u)} = \text{ch}u$
$\cos\alpha > 0$ puisque $\alpha \in ]0;\pi/2[$

$$= -\frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \int_{u_0}^{u_A} \frac{1 + \text{ch}\, 2u}{2} \, du$$

$$= -\frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left[\frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \text{sh}\,(2u)\right]_{u_0}^{u_A}$$

$$= -\frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left[\frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \text{sh}\, u\, \text{ch}u\right]_{u_0}^{u_A}$$

$$= -\frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left[\frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \text{sh}\, u \sqrt{1 + \text{sh}^2(u)}\right]_{u_0}^{u_A}$$

$$= \text{(tous calculs faits)} \quad \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \text{argsh}\,(\tan a) + \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha$$

L'expression obtenue sera notée $L(\alpha)$ puisque fonction de $\alpha \in ]0;\pi/2[$.

$$\boxed{L(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\left[\cos^2(\alpha)\, \text{argsh}\,(\tan\alpha) + \sin\alpha\right]}$$

* Il faut déterminer $\alpha$ pour lequel cette fonction admet un maximum. Cherchons les valeurs de $]0 ; \pi/2[$ qui annulent $L'(\alpha)$.

$$L'(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\left[-2\cos\alpha \sin\alpha\, \text{argsh}\,(\tan\alpha) + \cos^2(\alpha) \,.\, \frac{1 + \tan^2(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} + \cos\alpha\right]$$

$$L'(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\left[-2\sin\alpha\cos\alpha\, \text{argsh}\,(\tan\alpha) + \cos(\alpha) + \cos(\alpha)\right]$$

car $\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
$(\alpha \in ]0 ; \pi/2[ )$

$$L'(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \cos\alpha \left[1 - \sin\alpha . \text{argsh}\,(\tan\alpha)\right]$$

Sur $]0;\pi/2[$, $\cos\alpha$ reste positif ; il reste donc à déterminer, si possible, la (les) valeur(s) qui annule (nt) $1 - \sin\alpha.\ \text{argsh}(\tan\alpha)$.

Posons $f(\alpha) = 1 - \sin\alpha.\ \text{argsh}(\tan\alpha)$ pour $\alpha \in ]0\ ;\ \pi/2[$. $f$ est dérivable sur $]0\ ;\ \pi/2[$ et sa fonction dérivée est :

$$f'(\alpha) = -\cos\alpha.\text{argsh}(\tan\alpha) - \sin\alpha . \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$= -[\cos\alpha.\text{argsh}(\tan\alpha) + \tan\alpha]$$

La parenthèse est "positive" donc $f'(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in ]0\ ;\ \pi/2[$. Par suite, $f$ est strictement décroissante (et continue, car dérivable) sur $]0\ ;\ \pi/2[$ si bien que l'équation $f(\alpha) = 0$ admet une unique solution $\beta$ sur $]0\ ;\ \pi/2[$ ; en effet : $\lim\limits_{\alpha \to 0} f(\alpha) = 1$ et $\lim\limits_{\alpha \to \pi/2} f(\alpha) = -\infty$

Pour obtenir une valeur approchée de cette solution, on peut employer la méthode de dichotomie sur calculatrice programmable (en BASIC) : on obtient :

$\boxed{\beta = 0{,}985\ 514\ 545\ 4 \text{ rad à } 10^{-6} \text{ près}}$

ce qui représente $\boxed{\beta = 56{,}465\ 824\ 1° = 56°\ 27'\ 56{,}97''}$

***Autres solutions :***
Luc BARRIA (Serres-Morlaas), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Edgar DELPLANCHE (Créteil), Jean GOUNON (Paris), François LO JACOMO (Paris), Pierre MANAC'H (Lorient), René MANZONI (Le Havre), Etienne MARACHE (Barcelonnette), Pierre RENFER (Ostwald), Jean-Paul ROUX (Unieux).

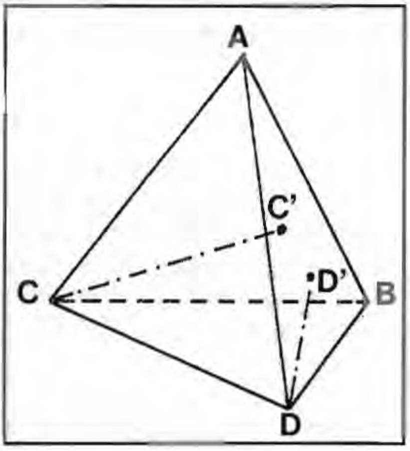
**Remarque :** Ce dernier correspondant cherche aussi la valeur de $\alpha$ telle que l'aire du secteur de parabole compris entre la trajectoire et le sol soit maximale. Il trouve la condition $(\cos\alpha \sin^3\alpha)' = 0$ soit :

$3\cos^2\alpha \sin^2\alpha - \sin^4\alpha = 0$ ce qui donne $\alpha = 60$ degrés.

**ÉNONCÉ N° 173** (CONCOURS GENERAL 1989)

Déterminer le plus grand nombre réel $k$ tel que, pour tout tétraèdre ABCD de volume $V$, le produit des aires des faces ABC, ABC et ACD soit supérieur ou égal à $kV^2$.

**SOLUTION** de l'auteur




Soit ABCD un tétraèdre quelconque. Nous désignerons l'aire d'une face LMN par (LMN). Soient C' et D' les projections orthogonales de C et D sur les faces opposées à ces sommets.

Le volume du tétraèdre est :
$V = \frac{1}{3}$ (ABD).CC' = $\frac{1}{3}$ (ABC).DD'.
Or, DD', distance de D à la face ABC, est inférieur ou égal à DA et CC', distance de C à la base ABD, est inférieur ou égal à la distance de C à (AD), c'est-à-dire à la hauteur issue de C dans le triangle ACD.
Donc $\frac{1}{2}$ CC'.DD' $\leq$ (ACD). Par suite :
$\frac{9}{2}V^2$ = (ABD).(ABC).$\frac{1}{2}$ CC'.DD' $\leq$ (ABD).(ABC).(ACD).

Le produit des aires des faces ABC, ABD, ACD est supérieur ou égal à $\frac{9}{2}V^2$. On constate qu'il y a égalité lorsque ces trois triangles sont rectangles en A. Donc le réel charché est $k = \frac{9}{2}$.

***Autres solutions :***

Luc BARRIA (Serres-Morlaas), François LO JACOMO (Paris), Etienne MARRACHE (Barcelonnette), Charles NOTARI (Noë), Serge PARPAY (Niort), Pierre RENFER (Ostwald), Jean-Paul ROUX (Unieux).

**ÉNONCÉ N° 374** (Charles NOTARI; Noë).

Trouver un réel $a$, aussi grand que possible, tel que :
$\cos x + \cos y \leq 1 + \cos xy$ pour tous réels $x$ et $y$ vérifiant $x^2 + y^2 \leq a^2$.

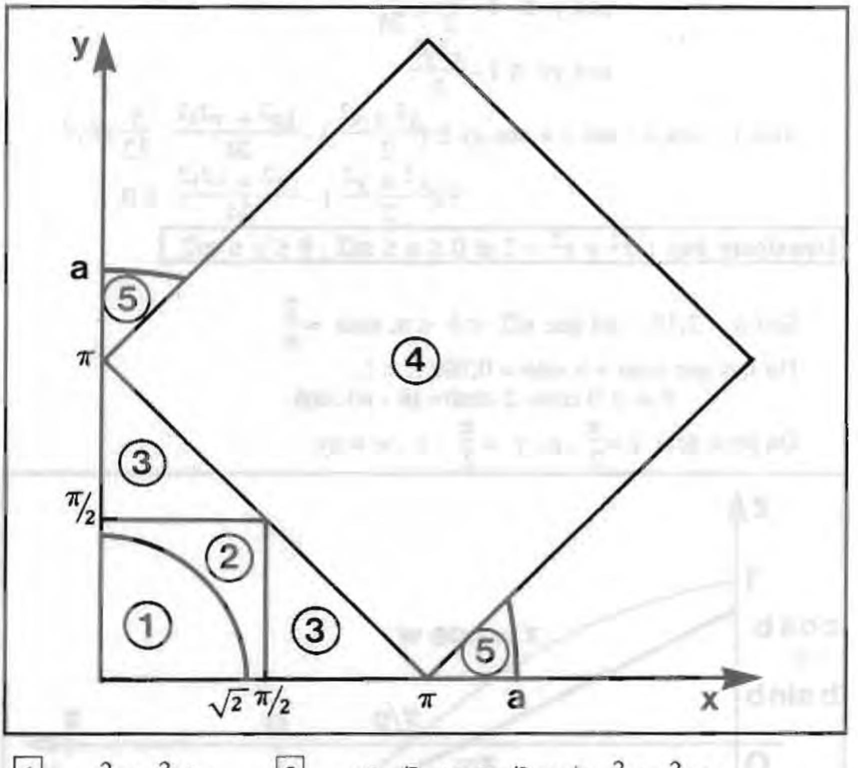
**SOLUTION** de François LO JACOMO (Paris).

$\boxed{\textbf{\textit{REPONSE}}}$ La valeur maximum de $a$ vaut : $a \approx 3{,}991\ 643\ 719$

***DEMONSTRATION***

L'inégalité est mise en défaut pour $x = 0{,}745\,906\,5$ et $y = 3{,}921\,331\,8$, ce qui suffit à prouver que $a$ ne peut pas être supérieur à 3,991 643 72 environ.

Comme le signe de $x$ et le signe de $y$ne modifient pas les membres de l'inégailté, nous supposerons $x \geq 0$ et $y \geq 0$ et étudierons séparémeut cinq cas, délimités par la figure ci-dessous :




| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $x^2 + y^2 \leq z$ | 2 | $x \leq \pi/2$ et $y \leq \pi/2$ mais $x^2 + y^2 > z$ |
| 3 | $x > \pi/2$ ou $y > \pi/2$ mais $x + y \leq \pi$ | | |
| 4 | $\pi \leq x + y \leq 3\pi$ , $-\pi \leq x - y \leq \pi$ | | |
| 5 | $x^2 + y^2 \leq a^2$ et ($y > \pi + x$ ou $x > \pi + y$ ) | | |

**Premier cas :** $0 \leq x^2 + y^2 \leq z$

*Lemme* : $\forall\, u \in \mathbf{R} \quad 1 - \frac{u^2}{z} \leq \cos u \leq 1 - \frac{u^2}{z} + \frac{u^4}{z^4}$

(simple étude de fonction).

*Conséquence :*

$$\cos x \leq 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}$$

$$\cos y \leq 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}$$

$$\cos xy \leq 1 - \frac{x^2y^2}{2}$$

d'où $1 - \cos x - \cos y + \cos xy \geq (\frac{x^2+y^2}{2}) - \frac{(x^2+y^2)^2}{24} - \frac{5}{12}x^2y^2$

$$\geq (\frac{x^2+y^2}{2}) - \frac{(x^2+y^2)^2}{24} \geq 0.$$

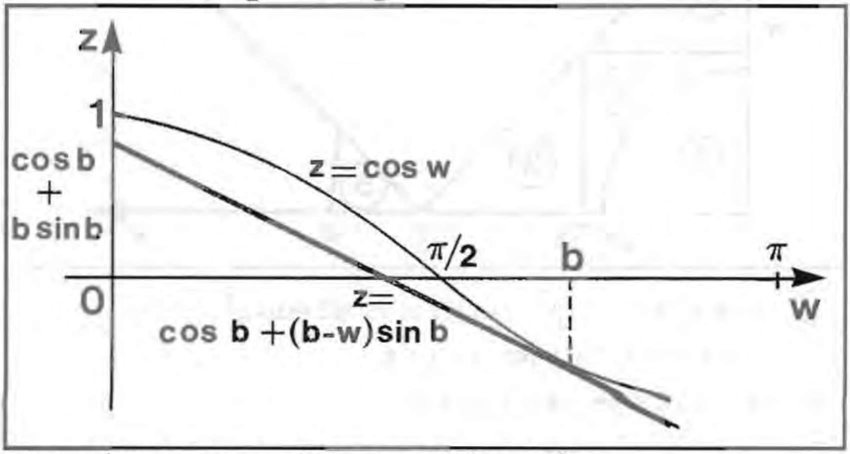
**Deuxième cas :** $x^2 + y^2 > 2$ et $0 \leq x \leq \pi/2$ , $0 \leq y \leq \pi/2$

Soit $b = 2{,}45\ldots$ tel que $\pi/2 < b < \pi$, $\sin b = \frac{2}{\pi}$

Du fait que $\cos b + b \sin b = 0{,}789\ldots < 1$,

$\forall\, w \geq 0 \ \cos w \geq \cos b + (b - w) \sin b$.

On pose donc $x = \frac{\pi}{2} - u$ , $y = \frac{\pi}{2} - v$ , $w = xy$.




$\cos x = \sin u \leq u$ , $\cos y = \sin v \leq v$ car $u \geq 0$ et $v \geq 0$ .

Donc $1 - \cos x - \cos y + \cos xy \geq 1 - (u + v) + \cos b + (b - w)\dfrac{2}{\pi} = A$.

Or, comme $w = xy = \dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{\pi}{2}(u + v) + uv$,

$$A = (1 + \cos b + \frac{2b}{\pi} - \frac{\pi}{2}) - \frac{2}{\pi}uv = \frac{2}{\pi} \ .$$

$$\text{avec } k = b + \frac{\pi}{2}(1 + \cos b) - \frac{\pi^2}{4} = 0{,}343\ 5\ldots$$

Pour que $A$ soit négatif, il faudrait que $u > \dfrac{k}{v}$ (donc $\dfrac{2k}{\pi} < v < \dfrac{\pi}{2}$)

donc que $x^2 + y^2 < (\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{k}{v})^2 + (\dfrac{\pi}{2} - v)^2$

$$= (v + \frac{k}{v})^2 - \pi\,(v + \frac{k}{v}) + (\frac{\pi^2}{2} - 2k) < 2$$

car $v + \dfrac{k}{v}$ varie de $2\sqrt{k} = 1{,}172\ 2\ldots$ à $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k}{\pi} = 1{,}789\ \ldots$ qui sont tous les deux entre les racines de : $X^2 - \pi X + (\dfrac{\pi^2}{2} - 2k - 2)$. D'où l'inégalité cherchée, dans ce deuxième cas où $x^2 + y^2 > 2$.

**Troisième cas :** $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $x + y \leq \pi$
mais $x > \dfrac{\pi}{2}$ ou $y > \dfrac{\pi}{2}$

En posant encore $x = \dfrac{\pi}{2} - u$, $y = \dfrac{\pi}{2} - v$, l'un des termes $u$ ou $v$ est négatif, mais $u + v \geq 0$.

Donc, $\cos x + \cos y = 2\cos(\dfrac{x - y}{2})\cos(\dfrac{x + y}{2}) \leq 2\sin(\dfrac{u + v}{2}) \leq u + v$

On a donc, avec les mêmes notations que dans le cas précédent (les mêmes inégalités restant valables) : $1 - \cos x - \cos y + \cos xy \geq \dfrac{2}{\pi}(k - uv)$, mais, cette fois-ci, $uv < 0$, ce qui rend l'inégalité trivialement vérifiée.

**Quatrième cas :** $\pi \leq x + y \leq 3\pi$, $-\pi \leq x + y \leq \pi$.

$\cos x + \cos y = 2\cos(\dfrac{x + y}{2})\cos(\dfrac{x - y}{2}) \leq 0$.

Donc $\cos x + \cos y \leq 1 + \cos xy$ (trivial).

Reste le cinquième cas, plus difficile. Nous supposerons que $x > \pi + y$, vu que $x$ et $y$ jouent des rôles symétriques.

**Cinquième cas : $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, $x \geq \pi + y$.**

La calculette nous permet de déterminer un point :

$x_0 = 3{,}921\,331\,386\ldots$, $y_0 = 0{,}745\,908\,665\ldots$

vérifiant : $\cos x_0 + \cos y_0 = 1 + \cos(x_0 y_0)$ $\boxed{\text{et}}$

$y_0 \sin x_0 - x_0 \sin y_0 = (y_0^2 - x_0^2)\sin(x_0 y_0)$.

La valeur cherchée de $a$ vérifie $a^2 = x_0^2 + y_0^2$ soit $a = 3{,}991\,643\,719\ldots$

Posons $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\pi \leq \rho \leq a$ ; la fonction $f_\rho(\theta) = 1 - \cos(\rho\cos\theta) - \cos(\rho\sin\theta) + \cos(\rho^2\cos\theta\sin\theta)$ a pour dérivée

$f'_\rho(\theta) = -\rho\sin\theta\sin(\rho\cos\theta) + \rho\cos\theta\sin(\rho\sin\theta) - \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin(\rho^2\cos\theta\sin\theta)$

Cette dérivée est du signe de : $F = -\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\sin y}{y} - [\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}]\sin(xy)$.

Comme $\pi \leq x \leq a$, $\quad 0 \leq -\dfrac{\sin x}{x} \leq 0{,}19$ et comme

$0 \leq y \leq 0{,}77\ldots \quad 0{,}9 \leq \dfrac{\sin y}{y} \leq 1$.

Si $xy \leq \pi/2$, $\sin(xy) \geq \dfrac{2}{\pi}(xy)$ donc

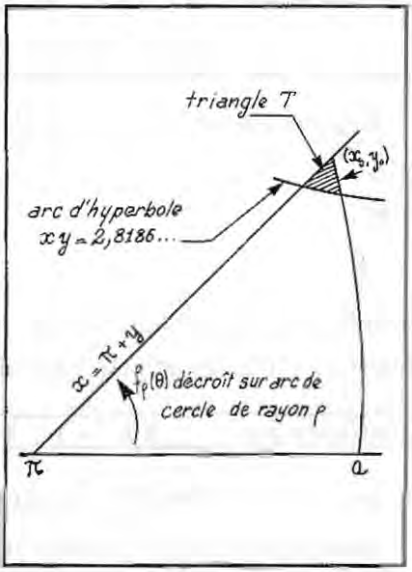
$F \leq 1{,}19 - \dfrac{2}{\pi}(x^2 - y^2) \leq 1{,}19 - 2(x + y) \leq 1{,}19 - 2\pi < 0$, car $x \geq \pi + y \geq \pi$.

Si $xy > \pi/2$, comme $y < \dfrac{\pi}{4}$ (car $(\pi/4)^2 + (5\pi/4)^2 > a^2$), $x \geq \pi > 4y$ donc

$F < 1{,}19 - 3{,}75\sin(xy)$, de sorte que, sur un arc de cercle de rayon $\rho$ ($\pi \leq \rho \leq a$) inclus dans le domaine étudié, la fonction décroît au moins jusqu'à l'arc d'hyperbole :

$xy = \pi - \text{Arc}\sin(1{,}19/3{,}75)$

$= 2{,}818\,6\ldots$



La fonction est, bien sûr, positive sur le segment $[\pi,a]$ ($y=0$) où elle vaut $1-\cos x$ ; mais elle est positive également sur la diagonale $x=\pi+y$, où elle vaut $1+\cos xy$.

Il reste à la minorer dans le petit triangle T pour prouver qu'elle est positive sur tout le domaine couvert pas ce cinquième cas.

Sur l'arc $x^2+y^2=a^2$, qui délimite le triangle T, la dérivée seconde $f''_\rho(\theta)$ est très nettement positive (les termes positifs qu'elle contient étant beaucoup plus grands que les termes négatifs) . Or $f'_\rho(\theta)$ s'annule par définition, en $(x_0, y_0)$, et change donc de signe ;, de sorte que $f_\rho(\theta)$ qui, lui aussi, s'annule en $(x_0, y_0)$, admet en ce point un minimum, donc
$\forall\theta\ f_\rho(\theta)\geq 0$ sur l'arc $x^2+y^2=a^2$ (donc $\rho=a$).

Par ailleurs,

$$\frac{\partial}{\partial\rho}[1-\cos(\rho\sin\theta)-\cos(\rho\cos\theta)+\cos(\rho^2\sin\theta\cos\theta)]=G$$

$$=\frac{1}{\rho}(y\sin y+x\sin x-2xy\sin(xy))$$

Or, sur le triangle T

$$x\sin x<-2{,}57,\ y\sin y<0{,}56 \text{ et } 2{,}81<xy<\pi\Rightarrow 2xy\sin xy<0$$

si bien que $G<-\frac{2}{\rho}<0$ sur tout le triangle T ; de sorte que, sur le triangle T, la fonction est minimale sur l'arc ($\rho$ maximum), c'est-à-dire sur l'arc $x^2+y^2=a^2$, où nous venons de voir qu'elle est positive ou nulle.

Elle est donc bien positive sur tout le triangle T et donc sur tout le domaine couvert par ce 5ème cas; ce qui achève la démonstration.

***Autres solutions :***

Aimée BAILLETTE (Perpignan), Claude MORIN (Limoges).