Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher "de beaux problèmes" ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

M.Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.).

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N°184 (Dominique ROUX, Limoges)

Quels sont les entiers égaux à une somme de cinq carrés non nuls ?

ÉNONCÉ N°185 (François LO JACOMO, Paris)

Etant donné un triangle d'aire S, quelle est l'aire de l'ensemble des points par lesquels on peut faire passer trois droites partageant le triangle en deux moitiés d'aires égales ?

ÉNONCÉ N°186 (Charles AUQUE, Clermont-Ferrand)

Quel est le plus petit entier qui n'a pas de multiple s'écrivant avec les 10 chiffres de 0 à 9, chacun étant pris une seule fois ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°169 (Michel LAFOND, Dijon)

Est-il vrai que si m, n et p sont des entiers positifs tels que l'un d'eux soit premier avec les deux autres, alors l'équation $x^m + y^n = z^p$ admet une solution dans $\mathbf{N}^*$?

SOLUTION (François LO JACOMO, Paris)

- Si p est premier avec n et m, il est premier avec leur produit nm, donc les nombres kp pour $0 \leq k < mn$ sont tous distincts modulo mn, par suite, il existe k et l, $0 < l < p$, $0 < k < mn$ tels que $kp = lmn + 1$. Il suffit alors de choisir $x = 2^{ln}$, $y = 2^{lm}$ et $z = 2^k$.

- Si par contre p n'est pas premier avec n et m, comme n et m jouent des rôles symétriques, on peut supposer que c'est m qui est premier avec n et p, donc avec leur produit np, d'où : il existe a et k, $0 < a < np$, $0 < k < m$ tels que $am = knp + 1$. Posons $b = kp$, $c = kn$ et $q = bn = cp = am - 1$. Il suffit de choisir $x = (2^q - 1)^a$, $y = (2^q - 1)^b$ et $z = [2\,(2^q - 1)]^c$ pour avoir :

$$x^m + y^n = (2^q - 1)^{q+1} + (2^q - 1)^q = 2^q\,(2^q - 1)^q = z^q.$$

Autres solutions : l'Auteur, Charles NOTARI (Noë), Bernard PETIT (Brest), Pierre SAMUEL (Orsay), et une solution partielle de Serge GAIGNOUX (Montigny-sur-Vesle).

Remarques :

La solution ci-dessus n'est en général ni la seule, ni la plus simple. Par exemple :

$x^3 + y^2 = z^3$ admet la solution $7^3 + 13^2 = 8^3$

$x^2 + y^2 = z^3$ admet la solution $2^2 + 11^2 = 5^3$

$x^2 + y^3 = z^2$ admet une infinité de solutions :

$z = \dfrac{a^3 + b^3}{2}$, $x = \dfrac{a^3 - b^3}{2}$, $y = ab$ où a et b sont des entiers de même parité, avec $a > b$.

D'autre part on peut démontrer que l'équation $x^2 + y^3 = z^6$ n'admet pas de solution dans N*. Enfin l'équation $x^n + y^m = z^p$ peut admettre des solutions lorsque n, m, p ne vérifient pas la condition donnée dans l'énoncé N°169, par exemple : $75^2 + 10^4 = 5^6$.

ÉNONCÉ N°170 (François COULOIGNER, Forges les Eaux)

Déterminer les points du cercle trigonométrique à coordonnées décimales.

SOLUTION (Pierre RENFER, Ostwald)

On sait que les points à coordonnées rationnelles du cercle trigonométrique ont pour coordonnées (x,y) ou (y,x), avec

$$x = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

où m et n sont des entiers premiers entre eux, de parités distinctes (les fractions sont alors irréductibles).

Pour que x et y soient décimaux, il faut et il suffit que $m^2 + n^2$ soit une puissance de 5, car $m^2 + n^2$ est impair.

Soit $5^p = m^2 + n^2 = (m + in)(m - in)$.

Or, $5^p = (2 + i)^p (2 - i)^p$, où $(2 + i)$ et $(2 - i)$ sont irréductibles dans l'anneau principal Z[I] des entiers de Gauss. Les seules décompositions de 5^p en produit de deux facteurs conjugués sont donc du type (à un élément inversible près) :

$$5^p = [(2 + i)^k (2 - i)^{p-k}]\,[(2 - i)^k (2 + i)^{p+k}] \text{ avec } 0 \leq k \leq p.$$

Mais la partie réelle et la partie imaginaire d'un tel facteur ne sont premiers entre eux que si $k = 0$ ou $k = p$.

Soit a_p la partie réelle et b_p la partie imaginaire de $(2 + i)^p$ $(p \in \mathbf{N})$.

Les points à coordonnées décimales du premier quadrant du cercle trigonométrique sont ceux de coordonnées (x,y) ou (y,x) avec

$$x = \frac{|2a_p\,b_p|}{a_p^2 + b_p^2} \quad , \quad y = \frac{|a_p^2 - b_p^2|}{a_p^2 + b_p^2}\,.$$

En faisant opérer sur l'ensemble des points à coordonnées décimales du cercle trigonométrique le groupe engendré par les symétries S_1 par rapport à l'axe des x et S_2 par rapport à la première bissectrice, on obtient dans chaque orbite un représentant du type $\left(\frac{a_p^2 - b_p^2}{a_p^2 + b_p^2}, \frac{2a_p\,b_p}{a_p^2 + b_p^2}\right)$; son affixe est :

$$\frac{a_p^2 - b_p^2 + 2ia_p\,b_p}{a_p^2 + b_p^2} = \frac{(2+i)^{2p}}{5^p} = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right).$$

Comme S_1 est la conjugaison et $S_1 \circ S_2$ la rotation d'angle droit : multiplication par i, on obtient finalement tous les points cherchés sous l'une des formes (pour leurs affixes) : $\pm\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^p$ ou $\pm i\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^p$, $p \in \mathbf{Z}$

ou, ce qui revient au même $\pm\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)^p$ ou $\pm i\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)^p$, $p \in \mathbf{Z}$

SOLUTION 2 (François COULOIGNIER , Forges-les-Eaux).

U désigne le groupe des complexes de module 1.

$D^{\mathbf{U}}$ le sous-groupe de **U** formé des éléments à coordonnées décimales. $D^{\mathbf{U}}$ contient le sous groupe **H** de **U** engendré par i et $g = 0{,}8 + 0{,}6i$; on va montrer la réciproque.

Si $a + ib$ est dans $D^{\mathbf{U}}$, l'égalité $a^2 + b^2 = 1$ montre que a et b ont le même nombre de chiffres après la virgule. Notons $D^{\mathbf{U}}{}_n$ la partie de $D^{\mathbf{U}}$ formée des éléments dont la partie réelle a au plus n chiffres après la virgule.

On va montrer par récurrence que pour tout n, $D^{\mathbf{U}}{}_n$ est inclus dans **H**.

◊ Pour un élément $z = a + ib$ de $D^{\mathbf{U}}{}_n \setminus D^{\mathbf{U}}{}_{n-1}$ $(n > 0)$,

notons pour $\alpha = a\,10^n$, $\beta = b\,10^n$, t et u les restes des divisions de α et β par 10 ; $\alpha = t + 10v$; $\beta = u + 10w$. L'égalité

$$\alpha^2 + \beta^2 = t^2 + u^2 + 100(v^2 + w^2) + 20(tv + uw)$$

montre que $t^2 + u^2 \equiv 0[20]$, équation dont les solutions sont :
(2 , 4) ; (2 , 6) ; (4 , 2) ; (4 , 8) ; (6 , 2) ; (6 , 8) ; (8 , 4) ; (8 , 6).
Si $(t, u) = (8, 6)$ posons $z' = a + ib = z$
Si $(t, u) = (8, 4)$ posons $z' = a - ib = z^{-1}$

Si $(t, u) = (6, 8)$ posons $z' = b + ia = iz^{-1}$
Si $(t, u) = (6, 2)$ posons $z' = b - ia = -iz$
Si $(t, u) = (4, 8)$ posons $z' = -b + ia = iz$
Si $(t, u) = (4, 2)$ posons $z' = -b - ia = -iz^{-1}$
Si $(t, u) = (2, 6)$ posons $z' = -a + ib = -z^{-1}$
Si $(t, u) = (2, 4)$ posons $z' = -a - ib = -z$.

Dans chaque cas, les restes des divisions par 10 des parties réelles et imaginaires de $10^n z'$ sont respectivement 8 et 6.

Notons $10^n z' = \alpha' + i\beta'$ et $\alpha' = 10v' + 8$ et $\beta' = 10w' + 6$; $z'g^{-1}$ a pour partie réelle : $\dfrac{8\alpha' + 6\beta'}{10^{n+1}}$. Or $8\alpha' + 6\beta' = 10(8v' + 6w') + 100$

$$\text{et } \alpha'^2 + \beta'^2 = 100(v'^2 + w'^2) + 20(8v' + 6w') + 100$$

Ce dernier nombre étant divisible par 100, $8v' + 6w'$ est divisible par 5 donc par 10 et $8\alpha' + 6\beta'$ est lui divisible par 100. Par conséquent $z'g^{-1}$ est dans $D^U{}_{n-1}$.

Conclusion : pour $n > 1$, $D^U{}_{n-1} \subset H \Rightarrow D^U{}_n \subset H$.

Or $D^U{}_0 = \{1, i, -1, -i\}$ H : ainsi $D^U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D^U{}_n \subset H$.

Autres solutions :
Luc BARRIA (Serres-Morlaas), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Didier CUIDET (Tonncins), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Serge GAIGNOUX (Montigny-sur-Vesle), Marc GUINOT (Bourg en Bresse), François LO JACOMO (Paris), Charles NOTARI (Noë), Bernard PETIT (Brest), Pierre SAMUEL (Orsay).

ÉNONCÉ N° 171 (Claude BUISSIEZ, Clermont-Ferrand)

Les deux suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation de récurrence :
$u_{n+1} = 2(2n + 3)\, u_n + u_{n-1}$ $(n > 0)$ et sont définies par $a_0 = 3$, $a_1 = 19$, $b_0 = 1$, $b_1 = 7$. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

SOLUTION 1 (Maurice BEAUVAL, Versailles)

En supposant connu que le développement de e en fractions continues et pseudopériodiques est donné par $(2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,\ldots)$, on obtient les réduites : $\frac{2}{1}$, $\boxed{\frac{3}{1}}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\boxed{\frac{19}{7}}$, $\frac{87}{32}$, $\frac{106}{39}$, $\boxed{\frac{193}{71}}$, ... qui convergent vers e . On découvre que $\frac{3}{1} = \frac{a_0}{b_0}$, $\frac{19}{7} = \frac{a_1}{b_1}$, on va vérifier que la loi de récurrence, en prenant les termes de trois en trois est bien celle de l'énoncé :

Désignons les numérateurs par ... , α_{n-1} , β_{n-1} , γ_{n-1} , α_n , β_n , γ_n , α_{n+1} , avec $\gamma_{n-1} = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}$

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \gamma_{n-1} + \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + 2\beta_{n-1}\\
\beta_n &= (2n+2)\alpha_n + \gamma_{n-1} = (2n+3)\alpha_{n-1} + (4n+5)\beta_{n-1}\\
\gamma_n &= \beta_n + \alpha_n = (2n+4)\alpha_{n-1} + (4n+7)\beta_{n-1}\\
\alpha_{n+1} &= \gamma_n + \beta_n = (4n+7)\alpha_{n-1} + (8n+12)\beta_{n-1}
\end{aligned}$$

d'où
$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= (4n+6)(\alpha_{n-1} + 2\beta_{n-1}) + \alpha_{n-1}\\
&= 2(2n+3)\alpha_n + \alpha_{n-1}.
\end{aligned}$$

Pour les dénominateurs la récurrence est la même. Donc la suite $\frac{a_n}{b_n}$ converge vers e.

SOLUTION 2 (Richard ANDRÉ-JEANNIN, Sfax, Tunisie)

Nous allons montrer que $\lim \frac{a_n}{b_n} = e$, et aussi un résultat plus fort : $\lim (b_n e - a_n) = 0$. La rédaction s'inspire d'un article de F.Clarke (*Continued fractions expansions and the Legendre polynomials*, Bull. London Math. Soc. 18 (1986) 255-260), mais la méthode utilisée trouve son origine chez Hermite et Padé (H.Padé : *Œuvres*, Librairie Blanchard (1984), p.55-59).

Soit $p_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}[t^n(1-t)^n]$, le n$^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre sur [0,1]. Il se déduit du classique polynôme de Legendre P_n sur [- 1,1] par la relation : $P_n(x) = p_n(\frac{1-x}{2})$. Un calcul simple montre que

$$pn(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n+1}{i}\binom{n}{i} t^i \ ;$$

en particulier p_n est à coefficients entiers. Considérons la suite d'intégrales I_n, définie par : $I_n = \int_0^1 p_{n-1}(t)e^t\,dt$, $n \geq -1$. (1)

On va montrer que (I_n) vérifie la même relation de récurrence que les suites (a_n) et (b_n). Pour cela, utilisons la relation suivante, qui se déduit de la relation similaire pour les polynômes P_n :

$$p'_{n+2}(t) - p'_n(t) = -2(2n+3)\,p_{n+1}(t)\ ,\ n \geq 0$$

qui donne par intégration

$$\int_0^1 p_{n+2}(t) - p'_n(t)e^t\,dt = -2(2n+3)I_n\ .$$

Transformons le membre de gauche en intégrant par parties et en tenant compte des relations $p_n(1) = (-1)^n$, $p_n(0) = 1$, pour obtenir :

$$-(I_{n+1} - I_{n-1}) = -2(2n+3)\,I_n,$$

ou

$$I_{n+1} = 2(2n+3)\,I_n + I_{n-1}\ ,\ n \geq 1$$

ce qui est la récurrence vérifiée par (a_n), (b_n) et aussi $(b_ne - a_n)$.

Par un calcul direct, on a:

$$I_{-1} = \int_0^1 e^t\,dt = e - 1\ ,\ I_0 = \int_0^1 (1-2t)\,e^t\,dt = e - 3 = b_0e - a_0\ ,$$

et $I_1 = 6I_0 + I_{-1} = 7e - 19 = b_1e - a_1$.

On en déduit que pour tout $n \geq 0$, $I_n = b_ne - a_n$. (2)

Par ailleurs, transformons (1) en intégrant $(n+1)$ fois par parties pour obtenir

$$I_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}\int_0^1 e^t t^{n+1}(1-t)^{n+1}\,dt\ . \qquad (3)$$

La majoration évidente $t(1-t) \leq 1/4$ pour $0 \leq t \leq 1$ entraîne que

$$|I_n| \leq \frac{e}{(n+1)!}(1/4)^{n+1}\ ,$$

d'où $\lim I_n = \lim (b_ne - a_n) = 0$, et par suite, puisqu'il est évident que $\lim b_n = +\infty$, $\lim (e - \frac{a_n}{b_n}) = 0$.

Complément : grâce à une majoration plus fine de I_n, on va démontrer que

$$\left|b_n e - a_n\right| \le \frac{1}{2b_n}. \qquad (4)$$

D'après le théorème de Legendre, ceci entraînera que $\frac{a_n}{b_n}$ est une réduite du développement en fraction continue du nombre e, à condition de vérifier que a_n et b_n sont premiers entre eux. Ce dernier s'établit aisément, car il est clair que a_n et b_n sont impairs, et une récurrence facile montre que

$$a_{n+1}\, b_n - a_n\, b_{n+1} = 2\,(-1)^{n+1}.$$

Par ailleurs, il est connu que $\displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^n = \frac{(n\,!)^2}{(2n+1)\,!}$.

En revenant à (3), on en déduit que $\left|I_n\right| = \left|b_n e - a_n\right| \le \dfrac{e\,(n+1)\,!}{(2n+3)\,!}$,

et ceci est immédiat à montrer par récurrence, à partir de la relation qui définit la suite (b_n).

Autres solutions :

Edgard DELPLANCHE (Créteil) , Robert FERREOL (Paris) , François JABŒUF (Montpellier) , François LO JACOMO (Paris) , René MANZONI (Le Havre) , Charles NOTARI (Noë) , et une solution fausse.

COURRIER DE LECTEUR

1) Solutions parvenues après la rédaction de la rubrique : ÉNONCÉ N° 165 : Maurice PERROT (Paris).

2) Philippe DELEHAM (Reims) nous fait part d'un procédé de calcul des nombres de Bernoulli définis par l'identité symbolique : $\dfrac{t}{e^t - 1} = e^{\beta t}$. Il obtient:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{S_{n+1,k} \cdot s_{k+1,2}}{k}$$

où les $S_{n,k}$ et $s_{n,k}$ sont les nombres de Stirling de 2ème et 1ère espèce. Cette formule était-elle connue de lecteurs du *Bulletin* ?