Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes" ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement donnée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.) :

M.Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N°196 (Concours général 1991).

Soit S un point fixe d'une sphère (Σ). On considère les tétraèdres SABC inscrits dans la sphère (Σ) et dont les arêtes issues de S sont deux à deux orthogonales. Montrer que les plans (ABC) passent par un point fixe.

ÉNONCÉ N°197 (Dominique ROUX, Limoges).

Soient dans l'espace 8 points tels qu'il n'y en ait pas quatre dans un même plan. Chaque segment joignant deux quelconques d'entre eux est peint soit en bleu, soit en rouge. Soit B le nombre des triangles dont les trois côtés sont bleus et R le nombre des triangles dont les trois côtés sont rouges. Quelle est la la plus petite valeur possible de $B + R$?

ÉNONCÉ N°198 (Dominique ROUX, Limoges).

Existe-t-il trois entiers non nuls dont la somme des carrés est un carré et dont la somme des cubes est un cube?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 181 (Eugène EHRHART, Strasbourg).

Construire un point dont la somme des distances à quatre points donnés du plan soit minimum.

SOLUTION de Maurice BAUVAL (Versailles).

NOTATIONS : MA pour distance de deux points M et A, [AB] pour segment AB.

Pour deux points fixes A et B, et M variable, le minimum de MA+MB est obtenu pour tout point M du segment [AB] : $\forall$ M $\notin$ [AB], MA+MB>AB

Soient quatre points A, B, C, D tels que [AB] $\cap$[CD] $\neq \varnothing$, le minimum de f(M) = MA+MB + MC+MD est obtenu pour tout point M $\in$ [AB]$\cap$[CD]. Dans chacun des trois cas de figure qui suivent, la solution est évidente :

a) Si l'enveloppe convexe des quatre points donnés est un quadrilatère, f(M) est minimum quand M est au point I, intersection des diagonales.
b) Si les quatre points sont alignés -notons les ABCD- alors [AB]$\cap$[CD]=[CB] ; f(M) est minimum quand le point M appartient au segment [CB].
c) Si trois des points, mais pas quatre, sont alignés -notons CBD les trois points alignés dans cet ordre- , f(M) est minimum quand M est en B : B = [AB] $\cap$ [CD].

Le problème n'est cependant pas résolu si l'un des quatre points est strictement à l'intérieur du triangle défini par les trois autres points. Pour tout point M autre que A, B, C ou D, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(M)) = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} + \frac{\overrightarrow{CM}}{CM} + \frac{\overrightarrow{DM}}{DM}$$

C'est la somme de quatre vecteurs unitaires. Si le minimum de f(M) s'obtenait pour un point M autre que A, B, C ou D, le gradient serait nul. Or, quatre vecteurs unitaires n'ont une somme nulle que s'ils sont deux à deux opposés. Dans ce dernier cas de figure, aucun point M du plan ne réalise la condition $\overrightarrow{\text{grad}}(f(M)) = \vec{0}$. C'est donc en l'un des quatre points A, B, C ou D que le minimum de f(M) est atteint.

Soit alors D le point intérieur au triangle ABC. Vérifions que f(M) est minimum quand M est en D.

Par exemple, on a : BD + DC plus court que BA + AC

DB+DA+DC < AD+AB+AC d'où f(M) < f(A).

De même pour f(D) < f(B) et f(D) < f(C).

Autres solutions :

Michel BIGOT (Octeville), Mireille BOURNAUD (Vitry sur Seine), Edgar DELPLANCHE (Créteil), Eugène EHRHART (Strasbourg, François LO JACOMO (Paris), Charles NOTARI (Noë), et une réponse incomplète.

Note : Le problème n'est pas résolu dans le cas où les quatre points donnés ne sont pas coplanaires.

ÉNONCÉ N°182 (Maurice CRESTEY, Vincennes).

Existe-t-il des polygônes réguliers, autres que des carrés, dont tous les sommets sont les nœuds d'un quadrilatère à mailles carrées?

SOLUTION de Pierre SAMUEL (Bourg la Reine).

Soit P un polygône à n côtés dont les sommets sont parmi les nœuds d'un quadrillage à mailles carrées. On peut supposer qu'il s'agit des points à coordonnées entières. Nous supposerons seulement que les sommets de P ont des coordonnées *rationnelles*. Leur isobarycentre I est aussi à coordonnées rationnelles. On y translate l'origine. Par identification du plan au corps des nombres complexes, les sommets de P deviennent des éléments du corps quadratique $Q + Qi = \mathrm{K}$.

Soient z et z' deux sommets consécutifs de P. On a alors $z' = uz$, où u est la racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité d'argument $2\pi/n$. Ainsi, $u \in \mathrm{K}$ et est de degré 2 sur Q. Or on sait que le degré de u sur Q est $\varphi(n)$ où φ est l'indicateur d'Euler (voir par exemple, P.Ribenboim, *"l'arithmétique des corps"*, p.35, Ed.Hermann, 1972). Pour p premier, la formule $\varphi(p^s) = p^{s-1}(p-1)$ montre que ce nombre est supérieur au sens large à 3 sauf si $p^s = 2, 3$ ou 4. La "multiplicativité" de φ montre alors qu'on a $\varphi(n) = 2$ seulement pour $n = 3, 4$ ou 6. Or, pour $n = 3$ ou 6, $u = \frac{1}{2}[\pm 1 + i\sqrt{3}]$ n'est visiblement pas dans K.

Donc les seuls polygônes réguliers dont tous les sommets sont à coordonnées rationnelles sont les *carrés*.

Autres solutions :
Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Maurice CRESTEY (Vincennes), Georges LION (Nouméa), François LO JACOMO (Paris), Pierre RENFER (Ostwald).

ÉNONCÉ N° 183 (Louis MORDEFROID, Lons-le-Saunier).

Etant donnés n réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ on construit une suite en posant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, puis, pour tout k, $1 \le k \le n$, $u_{k+1} = a_k u_k + u_{k-1}$.
Posons $[a_1, a_2, \dots, a_n] = u_{n+1}$. Comparer $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ e t $[a_n, \dots, a_2, a_1]$

SOLUTION 1 de Pierre-Yves LE CLOIREC (Rennes).

On va montrer par récurrence que $\forall n \ge 1$,
$[a_1, a_2, \dots a_n] = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$.
Si $n \ge 3$ (i.e. $n-2 \ge 1$) et $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont donnés, on a par définition
$u_{n-1} = [a_1, \dots a_{n-2}]$, $u_n = [a_1, \dots, a_{n-1}]$ et $u_{n+1} = a_n u_n + u_{n-1}$ d'où
(*) $\quad \forall n \ge 3$, $[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_n [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] + [a_1, \dots, a_{n-2}]$.

On calcule
$[a_1] = u_2 = a_1$
$[a_1, a_2] = u_3 = a_2 a_1 + 1$
$[a_1, a_2, a_3] = u_4 = a_3(a_2 a_1 + 1) + a_1 = a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1$
$[a_1, a_2, a_3, a_4] = u_5 = a_4(a_3 a_2 a_1 + a_3 + a_1) + a_2 a_1 + 1$
$\qquad = a_4 a_3 a_2 a_1 + a_4 a_3 = a_4 a_1 + a_2 a_1 + 1$

On vérifie immédiatement sur ces expressions que
$[a_1, a_2] = [a_2, a_1]$
$[a_1, a_2, a_3] = [a_3, a_2, a_1]$
$[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a_4, a_3, a_2, a_1]$.

Pour n entier ≥ 1 appelons (Hn) la condition
(Hn) $[a_1, \dots, a_k] = [a_k, \dots, a_1]$ pour tout k tel que $1 \le k \le n$
et supposons-la vraie pour tout $n \ge 4$ donné. D'après (*), on a
$[a_1, \dots, a_n] \quad = a_{n+1} [a_1, \dots, a_n] + [a_1, \dots, a_{n-1}]$
$\qquad = a_{n+1} [a_n, \dots, a_1] + [a_{n-1}, \dots, a_1]$ en vertu de (H_n).
Comme $n - 1 \ge 3$, (*) donne encore

$[a_{n-1}, \dots, a_1] = a_1\,[a_{n-1}, \dots, a_2] + [a_{n-1}, \dots, a_3]$

$[a_n, \dots, a_1] = a_1\,[a_n, \dots, a_2] + [a_n, \dots, a_3]$ d'où

$$[a_1, \dots, a_{n+1}] = a_1\,a_{n+1}\,[a_n, \dots, a_2] + a_{n+1}\,[a_n, \dots, a_3] + a_1\,[a_{n-1}, \dots, a_2] + [a_{n-1}, \dots, a_3]$$

et de même

$$\begin{aligned}[a_{n+1}, \dots, a_1] &= a_{n+1}\,a_1\,[a_2, \dots, a_n] + a_1\,[a_2, \dots, a_{n-1}] \\ &\quad + a_{n+1}[a_3, \dots, a_n] + [a_3, \dots, a_{n-1}]\end{aligned}$$

= [an+1 , … , a1] à nouveau d'après (Hn).

Ainsi (Hn+1) est vraie. Puisque (Hn) est vraie pour $1 \leq n \leq 4$, il s'ensuit par récurrence que (Hn) est vraie pour tout $n \geq 1$.

SOLUTION 2 de François LO JACOMO (Paris).

Considérons le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & & \\ -1 & a_2 & 1 & & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

Si l'on développe par rapport à la première colonne, on trouve :

$$D_n = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & 0 \\ -1 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & 0 \\ -1 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

et donc, par récurrence $D_n = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1]$

Si au contraire on développe par rapport à la dernière ligne, on trouve

$$D_n = a_n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & 0 \\ -1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & 0 \\ -1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

d'où, par récurrence, $D_n = [a_1, a_2, \dots a_{n-1}, a_n]$. Ce qui prouve l'égalité.

Autres solutions

Edgard DELPLANCHE (Créteil), Georges LION (Nouméa) , René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë), Alain RAVELLI (Toulouse).

Complément dû à Pierre Yves LE CLOIREC (Rennes)
(J'ai également reçu des remarques analogues de Monsieur DELEHAM de Reims).

Application aux fractions continues,

Etant donnés des entiers $a_1, \dots a_n$ avec $a_n > 0$, on pose

$$F(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots \cfrac{1}{a_n}}}$$

Il est bien connu que $F(a_1, \dots, a_n) = \dfrac{p_n}{q_n}$ avec p_n et q_n premiers entre eux

donnés par les relations de récurrence
$p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$, et pour $n \geq 1$ $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$,
$q_0 = 0$, $q_1 = 1$, et pour $n \geq 2$ $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.

Pour $n \geq 2$, on a donc $p_n = [a_1, \dots, a_n]$, $q_n = [a_2, \dots, a_n]$ (avec les notations de ce problème).
Il s'ensuit que si $a_1 a_n \neq 0$ $F(a_1, \dots, a_n)$ et $F(a_n, \dots, a_1]$ ont même numérateur et que si a2$a_n \neq 0$ $F(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ et $F(a_1, a_n, \dots, a_3, a_2)$ ont même dénominateur.

COURRIER DE LECTEURS

1) Solutions tardives :

Dominique ROSSIN (Lyon) : N°180 ; Michel BIGOT (Octeville) : N° 180 ; André ANGLÈS (Limoges), autre solution du N° 168.

2) *Remarques de Monsieur MAGNIER.*

Le *Bulletin* N° 378, donne, page 246 et suivantes, une solution d'un exercice de calcul ; ce n'est pas un exercice de physique et je ne le prends que comme un exercice de calcul. Correcte, cette solution appelle, je crois, trois remarques :

- Tout d'abord, il est bien naturel qu'interviennent les fonctions hyperboliques ; il est classique que si, à tout nombre t de l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$, on associe le nombre x tel que $\mathrm{Sh}x = \tan t$, on définit une fonction remarquable ; en particulier

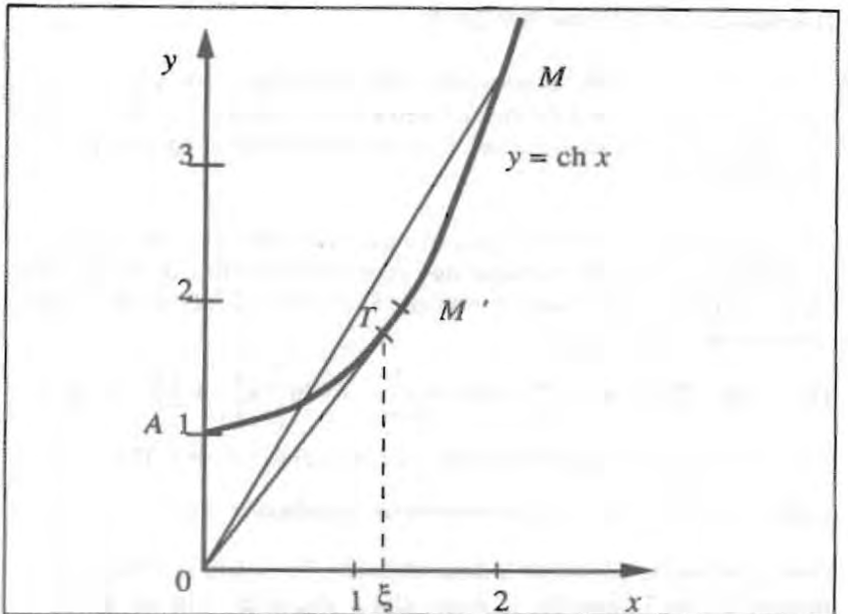
$\mathrm{Th}x = \sin t$, $\mathrm{Th}\frac{x}{2} = \tan\frac{t}{2}$, $\frac{dx}{dt} = \mathrm{Ch}x = \frac{1}{\cos t}$, $x = \ln\left[\tan\left(\frac{\;}{4} + \frac{t}{2}\right)\right]$. En posant donc $\mathrm{Sh}x = \tan\alpha$, l'équation trouvée du problème s'écrit $x\,\mathrm{Th}x = 1$. Or, écrite $\mathrm{Sh}x = \frac{\mathrm{Ch}x}{x}$, elle a une interprétation géométrique simple ; sa solution ξ est l'abscisse du point T de la demi-chaînette, Γ, $y = \mathrm{Ch}x$ $(x > 0)$ tel que la tangente à Γ en T passe par O. Aussi, elle se résoud très vite par itération : remplacer x, valeur approchée de ξ par x' tel que $\mathrm{Sh}x' = \frac{\mathrm{Ch}x}{x}$, c'est remplacer le point M de Γ d'abscisse x par le point M' tel que la tangente à Γ en M' soit parallèle à OM (voir la figurepage suivante).

- Si on revient à l'inconnue initiale α, il convient donc d'écrire l'équation qui la donne $\alpha = g(\alpha)$ où g est la fonction définie sur $]0\,,\pi/2[$ par

$$g(u) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arc\,tan}\left\{(\cos u).\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right]\right\}.$$

Non seulement toute suite (u_n) telle que $u_0 \in\ ]0\,,\pi/2[$ et, pour tout n, $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers α, mais cette convergence est extrèmement rapide comme on s'en convaincra en faisant le calcul (plus précisément on a $u_{n+1} - \alpha \sim \tan u/2\,(u_n - \alpha)^2$; c'est ce qu'on appelle une convergence "quadratique").

- Surtout -et c'est le seul but de ce papier- la solution du problème est à 10^{-10} près, 0,**985 514** 737 9 ; la valeur approchée indiquée de α est β = 0,**985 514** 545 4 ; elle est bien, comme il est dit "exacte à 10^{-6} près".



Mais nos collègues physiciens trouveraient contraire à leurs usages, en contradiction avec les réflexes qu'ils essaient de donner à leurs élèves, inconvenant même, de donner avec *dix* décimales une valeur approchée à 10^{-6} près d'un nombre ; ils n'en voudraient voir que *six* ou, à la rigueur, sept.

3) *Lettre de* Jean KUNTZMANN (Grenoble).

D'un triplet ou quadruplet à chiffres tous différents, on cherche à extraire un multiple de 7.

Il est toujours possible d'extraire d'un quadruplet à chiffres tous différents, 1, 2, 3 ou 4 chiffres qui, placés dans un ordre convenable forment un nombre multiple de 7. Montrons que l'affirmation contraire est fausse.

On élimine les chiffres 0 et 7. On peut de plus remplacer 8 par 1 et 9 par 2. Les chiffres (3,5,6) s'excluent mutuellement à cause de 35, 56, 63. De même, les chiffres (1,2,4) à cause de 14, 21, 42.

Cherchons à former un quadruplet. On peut prendre un chiffre au plus dans (3,5,6) et dans (1,2,4). Si on a pris 1, on peut prendre 8. Si on a pris 2, on peut prendre 9 et c'est tout ; on n'a jamais un quadruplet.

Remarque : le multiple de 7 extrait du quadruplet a toujours 1 ou 2 chiffres.

Etude des triplets. D'après l'étude précédente, les seuls triplets à chiffres tous différents dont on ne puisse peut être extraire un multiple de 7 sont : (1,8,3) , (1,8,5) , (1,8,6) , (2,9,3) , (2,9,5) , (2,9,6). Certains d'ailleurs peuvent fournir un multiple de 7 à 3 chiffres. Il suffit d'étudier : 113, 115, 116, 131, 151, ~~161~~, 311, ~~511~~, 611 et 223, 225, 226, 232, ~~252~~, 262, ~~322~~, 522, 622. On a barré les multiples de 7. Les seuls triplets à chiffres tous différents dont on ne peut extraire un multiple de 7 sont : (1,3 8) et (2,6,9).

4) Edgard DELPLANCHE de Créteil complète le résultat signalé dans le *Bulletin* 376 : pour tout triangle non isocèle les quatre tangentes de Feuerbach (ce sont les axes radicaux de l'énoncé page 632) sont tangentes à l'ellipse inscrite de STEINER (ellipse de centre G, tangente à chaque côté du triangle en son milieu) en démontrant, de façon barycentrique la propriété :

Si T, T_A, T_B, T_C désignent les points de contact avec l'ellipse des quatre tangentes de Feuerbach,
- les droites (AT_A), (BT_B), (CT_C) sont concourantes en T',
- les points T, T' et J (isotomique de I, centre du cercle inscrit) sont alignés.