Echanges

Sur le triangle et le tétraèdre

Cet article a déjà paru en mars 1991 dans la Revue de Mathématiqures Spéciales

E.Ehrhart
Strasbourg.

On va étudier la somme des distances d'un point d'un triangle aux côtés ou aux sommets et les sommes analogues pour le tétraèdre.

I-Distances aux côtés d'un triangle.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle (T), de côtés $a \leq b \leq c$ et X, Y, Z les distances, de somme s, d'un point M de (T) à ses côtés. Alors

(1) $$aX + bY + cZ = 2\mathcal{A}$$

(2) $$X + Y + Z = s.$$

Dans un repère normé, l'équation (1) représente un plan qui coupe les axes OX, OY, OZ respectivement en A($X = \dfrac{2\mathcal{A}}{a}$), B($Y = \dfrac{2\mathcal{A}}{b}$), C($Z = \dfrac{2\mathcal{A}}{c}$).

Le plan (2) coupe le triangle ABC si, et seulement si, $\dfrac{2\mathcal{A}}{c} \leq s \leq \dfrac{2\mathcal{A}}{a}$

où $\dfrac{2\mathcal{A}}{a}$ et $\dfrac{2\mathcal{A}}{c}$ sont les hauteurs de (T). Par suite :

Théorème 1.-*Pour un point d'un triangle, la somme des distances aux côtés est minimale ou maximale en un sommet.*

Corollaire.-*Pour tous les points d'un triangle équilatéral, la somme des distances aux côtés est la même.*

En portant $Z = s - X - Y$ dans (1), on obtient $(a - c)X + (b - c)Y = 2\mathcal{A} - cs$.

Dans les axes C_1x, C_1y, orientés par les vecteurs $\overrightarrow{C_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$ du triangle $T(A_1B_1C_1)$, les coordonnées de M sont $x = \dfrac{X}{\lambda}$ et $y = \dfrac{Y}{\mu}$ où λ et μ sont des constantes, donc $\lambda(a - c)x + \mu(b - c)y = 2\mathcal{A} - cs$, d'où

Théorème 2.-*Le lieu des points d'un triangle, dont la somme s des distances aux côtés est constante, est un segment de droite. Les segments qui correspondent aux différentes valeurs de s sont parallèles.*

II.- Distances aux faces d'un tétraèdre.

Soit V le volume du tétraèdre (T), dont les faces sont $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$ etX, Y, Z, U, les distances, de somme s, d'un point M de (T) à ses faces. Alors

$$(1) \qquad \alpha X = \beta Y + \gamma Y = 3V$$
$$(2) \qquad X + Y + Z = s.$$

Dans un repère normé, l'équation (1) représente un hyperplan, de l'espace $\mathbf{R}^4$, qui coupe les axes OX, OY, OZ, OU respectivement aux points

$$A\left(X = \frac{3V}{\alpha}\right) \;,\; B\left(Y = \frac{3V}{\beta}\right)$$
$$C\left(Z = \frac{3V}{\gamma}\right) \;,\; D\left(U = \frac{3V}{\delta}\right).$$

L'hyperplan (2) coupe le tétraèdre ABCD si, et seulement si,

$$\frac{3V}{\delta} \leq s \leq \frac{3V}{\alpha}$$

où $\dfrac{3V}{\alpha}$ et $\dfrac{3V}{\delta}$ sont des hauteurs de (T). Par suite :

Théorème 1.- *Pour un point d'un tétraèdre, la somme des distances aux faces est minimale ou maximale en un sommet.*

Corollaire.-*Pour tous les points d'un tétraèdre régulier, la somme des distances aux faces est la même.*

En portant $U = s - X - Y - Z$ dans (1), on obtient

$$(\alpha - \delta)X + (\beta - \delta)Y + (\gamma - \delta)Z = 3V - \delta s.$$

Dans les axes D_1x, D_1y, D_1z orientés par les vecteurs $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ du tétraèdre $T(A_1B_1C_1D_1)$, les coordonnées de M sont $x = \dfrac{X}{\lambda}$, $y = \dfrac{Y}{\mu}$, $z = \dfrac{Z}{\nu}$, où λ, m et ν sont des constantes. Donc

$$\lambda(\alpha - \delta)X + \mu(\beta - \delta)Y + \nu(\gamma - \delta)Z = 3V - \delta s, \text{ d'où}$$

Théorème 2.-*Le lieu des points d'un tétraèdre (T), dont la somme s des distances aux faces est constante, est une section plane de (T). Les sections qui correspondent aux différentes valeurs de s sont parallèles.*

III-Distances aux sommets d'un triangle.

On appelle *proximal* d'un triangle le point dont la somme des distances aux sommets est minimale et *point de Fermat* le point (s'il existe) qui voit les trois côtés sous le même angle.

Théorème 1, de Fermat.-*Si un triangle* (T) *a un angle supérieur ou égal à* $\dfrac{2\pi}{3}$, *son sommet est le proximal P. Sinon,* (T) *a un point de Fermat, qui est P(*)*

(*) Voir une démonstration simple de ce théorème dans le *Bulletin* 326 ("Quelques problèmes d'extemum" par Jean de Biasi)

Théorème 2.-*Le lieu des points d'un triangle (T) dont la somme S des distances aux sommets est constante, est un ovale, ou la partie d'un ovale qui appartient à* (T), (**).

(**) Voir ma démonstration de ce théorème dans le *Bulletin* n° 330 "Le proximal de n points", démonstration reprise sous ce titre dans un livre récent : E.Ehrhart, *Articles de mathématiques*, Cedic/Nathan, 1985, p.56-58.

Cet ovale est lisse, sauf s'il passe par un sommet, qui est alors un point anguleux. Les ovales qui correspondent aux différentes valeurs de S s'emboîtent les uns dans les autres et entourent le proximal.

On en déduit facilement :

Théorème 3.-*Pour un point d'un triangle, la somme des distances aux sommets est maximale au sommet du plus petit angle.*

Théorème 4, d'Erdös.- *Les sommes s et S des distances d'un point d'un triangle aux côtés et aux sommets vérifient S ≥ 2s. L'égalité n'a lieu que pour le centre d'un triangle équilatéral.*

Remarque : Du théorème d'Erdös, on déduit (*Bulletin* 379, p.394) l'inégalité $2\Sigma\frac{1}{d_i} \leq \Sigma\frac{1}{h_i}$, les d_i et les h_i étant respectivement les distances d'un point triangle à ses sommets et à ses côtés. Par un raisonnement analogue, la conjecture de Kazarinoff entraînerait $\sqrt{8}\,\Sigma\frac{1}{d_i} \leq \Sigma\frac{1}{h_i}$, les d_i et les h_i étant respectivement les distances d'un point d'un tétraèdre aux sommets et aux faces.

IV.-Distances aux sommets d'un tétraèdre.

On appelle *proximal* d'un tétraèdre le point dont la somme des distances aux sommets est minimale et *point de Fermat* le point (s'il existe) tel que la somme des vecteurs unitaires pointant de lui vers les sommets est nulle.

Remarque.-Le point de Fermat d'un tétraèdre équifacial est son centre de gravité par raison de symétrie.

Détermination mécanique du point de Fermat.

En un point M, on lie ensemble quatre fils, qui coulissent sans frottement par les sommets d'un tétraèdre et portent au bout des poids égaux. Le point de Fermat est la position d'équilibre de M, car il est alors soumis à des forces égales, dirigées vers les sommets et de résistance nulle.

Nous avons démontré dans le livre cité plus haut (p.57-58) :

Théorème 1.-*Si un tétraèdre* (T) *a un sommet tel que les vecteurs unitaires pointant de lui vers les autres sommets ont une résultante de module inférieur à 1, ce sommet est le proximal* P *de* (T). *Sinon,* (T) *a un point de Fermat, qui est* P.

Théorème 2.-*Le lieu des points d'un tétraèdre* (T), *dont la somme* S *des distances aux sommets est constante, est un ovoïde, ou la partie d'un ovoïde qui appartient à* (T).

Cet ovoïde est lisse, sauf s'il passe par un sommet de (T), qui est alors un point conique. Les ovoïdes qui correspondent aux différentes valeurs de S s'emboîtent les uns dans les autres et entourent le proximal.

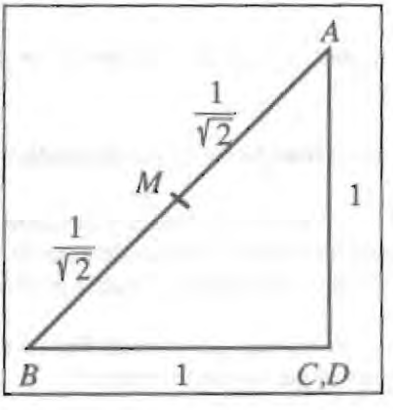
On en déduit sans peine :

Théorème 3.-*Pour un point d'un tétraèdre la somme des distances aux sommets est maximale en un sommet.*

On montre que pour tout tétraèdre équifacial $S \geq 3s$. Par analogie avec le théorème d'Erdös, on est tenté de conjecturer que $S > 3s$ pour tout tétraèdre non régulier. Il n'en est rien, comme le montre le tétraèdre dégénéré ABCD suivant (C et D confondus), où, pour M

$S = s\sqrt{8}$ car $S = 4.\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$ et

$s = 0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.



On démontre que pour tout tétraèdre trirectangle $S > s\sqrt{8}$. Ceci conduit à supposer :

Conjecture de Kazarinoff.-Les sommes S et s des distances d'un point d'un tétraèdre aux sommets et aux faces vérifient $S \geq s\sqrt{8}$.

V.-Conclusion

Chacune des sommes de distances que nous venons d'étudier est minimale ou maximale à un sommet, sauf s'il existe un point de Fermat, qui est alors le proximal des sommets du triangle ou du tétraèdre.

VI.-Distances aux arêtes d'un tétraèdre.

Problème ouvert.-En quel point d'un tétraèdre la somme σ des distances aux arêtes est-elle minimale ou maximale ?

On appelle *bihauteur* d'un tétraèdre la perpendiculaire commune de deux arêtes opposées. Il est évident que :

Théorème 1.-*Pour les tétraèdres à bihauteurs concourantes σ est minimale au point de concours. Un tel tétraèdre est orthocentrique, équifacial ou isocèle (losange gauche et ses diagonales).* Démontré dans le livre cité plus haut (p.75-76).

Pour un tétraèdre, σ peut être minimale en un sommet. Il en est par exemple ainsi pour un tétraèdre aplati, dont la base est un triangle équilatéral et dont le quatrième sommet est le centre D de cette base. Alors σ est manifestement minimale en D.

Pour le tétraèdre régulier, σ est maximale aux sommets.

Conjecture.-Pour un tétraèdre, σ est maximale en un sommet.

Cela est probable d'après la proposition suivante :

Théorème 2.-*Pour un point de l'ensemble des arêtes d'un tétraèdre, σ est maximale en un sommet.*

Il suffit de montrer que pour les points d'une arête, σ est maximale en une extrémité. On se limitera au cas où les trois bihauteurs sont intérieures au tétraèdre ABCD.

Soit M un point de [AB] et H et H' respectivement les pieds de la bihauteur sur [AB] et [CD]. Soit AB = a, AH = l, AM = X, HH' = h et (AB,CD) = α . Les sommes des distances de M à (AC) et à (AD) d'une part et à (BC) et (BD) d'autre part, sont λX et $\mu(a - X)$, où λ et μ sont des constantes positives. On peut supposer $\lambda \geq \mu$, quitte à échanger les noms A et

B si λ est inférieur à μ. La distance de M à (DC) est $d = \sqrt{h^2 + (X - l)^2 \sin^2\alpha}$.

Pour M, on a donc $\sigma = (\lambda - \mu)X + \mu a + \sqrt{h^2 + (X - l)^2 \sin^2\alpha}$.

Pour $X \geq l$, σ est croissante comme d et comme $(\lambda - \mu)X$ si $\lambda \neq \mu$. Dérivons par rapport à X :

$$\sigma' = \lambda - \mu + \frac{(X - l)\sin^2\alpha}{\sqrt{h^2 + (X - l)\sin^2\alpha}}$$

Soit maintenant $X \leq l$. En posant $\lambda - \mu = K$, $\sigma' = 0$ donne

$$(1) \qquad (l - X)^2 = \frac{K^2 h^2}{\sin^2\alpha - K^2}.$$

Deux cas sont possibles :

1° L'équation (1) n'a pas de racine parce que $K^2 \geq \sin^2\alpha$. Donc le signe de σ' est le même pour tout $X \geq l$. Or ce signe est (+) pour $X = l$, car σ est croissante pour cette valeur. Par suite, σ est croissante pour $0 \leq X \leq a$ est donc maximale quand M est en B.

2° (1) a une racine $O < X_1 \leq l$. Donc σ décroît pour $0 < X \leq X_1$ et croît pour $X_1 \leq X < a$. Elle est donc maximale en A ou en B, éventuellement en A et B.

Problème ouvert.- La surface fermée, lieu des points dont la somme des distances aux arêtes d'un tétraèdre est constante, est-elle convexe ?

Si oui, la conjecture faite plus haut serait démontrée.

Remarques.-1. Les rapports $\frac{S}{\sigma}$ et $\frac{S}{s}$ peuvent être arbitrairement grands.

Considérons un tétraèdre DABC où DA=DB=DC=b et AB=BC=CA=a .Au centre de la sphère inscrite, σ et s sont aussi petits que l'on veut, si a est suffisamment petit

2. le rapport des sommes de distances d'un point d'un tétraèdre régulier à ses sommets ou à ses arêtes est le même en ses sommets et en son centre : $\frac{S}{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$.

Conjecture .- Pour tout point d'un tétraèdre régulier $\sigma < S \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma$.