D'une discipline à l'autre

Mathématiques du mathématicien, Mathématiques du physicien

Quelques remarques autour de l'article de Bernard Diu.

Rudolf Bkouche
IREM de Lille

L'article de Bernard Diu (*Bulletin* N°337, Février-Mars 1991), comme c'est bien souvent le cas des articles sur les *mathématiques pour physiciens*, pose un problème que les «matheux» ont trop souvent tendance à oublier.

En quoi ces mathématiques sont-elles pour physiciens? Y a-t-il des mathématiques pour physiciens et des mathématiques pour mathématiciens? Si oui, en quoi diffèrent-elles et en quoi se ressemblent-elles?

Je voudrais aborder ici deux questions que j'ai rencontrées autant dans l'enseignement à l'Université que lors de certains stages IREM, le calcul vectoriel d'une part, la notion de différentielle d'autre part.

Le calcul vectoriel :

En quoi le vecteur du physicien diffère-t-il du vecteur du mathématicien?

Bernard Diu rappelle dans son article qu'une grandeur vectorielle est caractérisée par son module et sa direction (ou, selon la terminologie qu'on emploie, son module, sa direction et son sens).

Il y a bien longtemps, lycéen puis étudiant, j'ai appris, dans la classe de mathématiques, qu'un vecteur était défini par sa longueur, sa direction et son sens ; on y distinguait alors le *vecteur lié* (l'origine étant fixée) et le *vecteur libre* ; deux vecteurs liés étaient dits *équipollents* s'ils avaient même longueur, même direction et même sens, autrement dit s'ils définissaient le même vecteur libre (en langage moderne, on peut dire qu'un vecteur libre est une classe d'équivalence pour la relation d'équipollence).

Cela était suffisant pour introduire le calcul vectoriel (du physicien et du mathématicien) et permettait de comprendre pourquoi la notion de vecteur était *adéquate* pour représenter certaines grandeurs physiques comme les forces et les vitesses, et plus généralement celles qu'on appelle *grandeurs vectorielles*.

Il est vrai que le calcul vectoriel fut souvent un parent pauvre dans l'enseignement des mathématiques, les physiciens s'y intéressant bien plus ; rappelons que le premier cours de calcul vectoriel fut donné par Gibbs à l'Université de Yale où il enseignait la physique, cours donné en 1879 et publié sous forme de polycopié entre 1881 et 1884, cours qui sera publié en 1901 par Wilson (1).

Pour faciliter la lecture , toutes les notes ont été renvoyées en fin d'article p 611

En France, on peut noter la place du calcul vectoriel comme introduction à l'enseignement de la mécanique (2) ou de la physique (3). Du côté des mathématiciens, on peut signaler l'ouvrage de Châtelet et Kampé de Fériet (4), les ouvrages militants de Bouligand, l'*Introduction aux Méthodes Vectorielles* (5) pour les étudiants de licence et les *Leçons de Géométrie Vectorielle* (6) ainsi que le délicieux *Calcul Vectoriel* de Bricard (7). Il est vrai que ces ouvrages font référence à la mécanique et à la physique, ainsi les *Leçons de Géométrie Vectorielle* de Bouligand, qui s'inscrivent dans un traité général sur les *Principes de l'Analyse Géométrique*, portent le sous-titre de *Préliminaires à l'étude de la théorie d'Einstein*.

Nous pourrions citer aussi les canoniques *Compléments de Géométrie* de Deltheil et Caire (8) du milieu de ce siècle, qui développent le *Programme d'Erlangen* pour les élèves des classes préparatoires et les candidats aux concours d'enseignement, dans lesquels le calcul vectoriel tient une place importante dans la partie consacrée à la géométrie euclidienne (celle du groupe des isométries et des similitudes).

A la lecture de ces différents ouvrages, la question peut être posée : vecteur du physicien, vecteur du mathématicien, sont-ils si différents que certains le disent ?

Il est vrai qu'aujourd'hui le calcul vectoriel participe de l'algèbre linéaire, un vecteur n'est plus qu'un élément d'un espace vectoriel, lui-même défini par une axiomatique qui ignore *en principe* la géométrie (puisque, sur le plan structural, c'est l'algèbre linéaire qui fonde la géométrie). Et pourtant!

Le nom même d'espace vectoriel nous rappelle que cette notion est née de la rencontre du calcul vectoriel et du calcul linéaire lorsque des mathématiciens comme Giuseppe Peano (9) et Hermann Weyl (10) ont précisé le lien entre le linéaire et le vectoriel (11) ; ainsi Weyl explique dans l'ouvrage cité comment se relient, via le calcul vectoriel, le géométrique et le linéaire, ce qui n'est autre que la classique relation entre points, vecteurs et translations.

C'est la misesen évidence de cette liaison qu'on peut considérer comme la linéarisation de la géométrie, qui a conduit à la représentation géométrique du linéaire, géométrisation utile autant au mathématicien qu'au physicien (12).

La distinction entre le vecteur du physicien et le vecteur du mathématicien n'aurait donc pas lieu d'être ; d'abord parce que le physicien d'aujourd'hui utilise les notions les plus sophistiquées du mathématicien et que l'on ne saurait faire de physique théorique sans connaître le vecteur du mathématicien, celui des espaces vectoriels ; ensuite parce que la connaissance du vecteur du calcul vectoriel élémentaire est indispensable si l'on veut comprendre la géométrisation du linéaire autrement que comme un simple artifice langagier. Pourrai-je dire ici qu'un de mes plus beaux souvenirs de ma vie d'étudiant en mathématiques reste la démonstration *géométrique* du théorème des trois perpendiculaires dans un espace de Hilbert par Choquet dans son cours de *Calcul différentiel et intégral* comme on disait alors ? Pourrai-je aussi ajouter qu'un des plus beaux exposés introductifs à la théorie des espaces de Hilbert est celui de Dirac dans ses *Principles of Quantum Mechanics* (13) ?

La différentielle

Mais qu'est-ce donc qu'une différentielle ?

Dans un cours de géométrie différentielle où je définissais la première forme quadratique fondamentale d'une surface, j'expliquais le ds^2 comme représentant le carré d'un élément de longueur sur cette surface, ce qui permettait, Pythagore aidant, d'exprimer ce même ds^2 comme une forme quadratique des différentielles des coordonnées curvilignes (14), soit

$$ds^2 = \mathrm{A}du^2 + 2\mathrm{B}du dv + \mathrm{C}dv^2 .$$

Un étudiant me posait alors la question de la signification de ce que je faisais ; pour lui, la différentielle d'une fonction était une forme linéaire tangente comme on la définit aujourd'hui dans les bons ouvrages d'analyse et il ne comprenait pas le lien entre ces formes linéaires tangentes et les éléments *infiniments petits* (puisque c'est d'eux qu'il s'agissait) dont je parlais.

Aurait-il fallu se contenter de dire que la première forme quadratique fondamentale était une forme quadratique définie sur le module des champs de vecteurs sur la surface ou un polynôme homogène du second degré en les formes différentielles du et dv dûment définies ? En quoi ces définitions (dont il n'est pas question de nier la rigueur et l'utilité) permettent-elles de comprendre la géométrie des surfaces si l'on n'a pas vu *aussi* la notion de différentielle comme élément infiniment petit (la différentielle du physicien diront certains), différentielle qui est tout autant celle du mathématicien.

La même question de cette distinction entre la différentielle du physicien et la différentielle du mathématicien, m'avait été posée, il y a quelques années, dans un stage IREM réunissant professeurs de mathématiques et professeurs de physique, donnant lieu à d'âpres discussions où l'on oubliait à quels problèmes répondait le calcul différentiel, ramenant celui-ci, comme trop souvent dans l'enseignement, soit à la définition rigoureuse des concepts qui va quelquefois jusqu'à les rendre incompréhensibles et inutilisables pour qui veut s'en servir, soit à des définitions intuitives à partir desquelles on ne peut énoncer de règles opératoires, ce qui les rend tout aussi inutilisables! C'est donc encore cette distinction qui est à remettre en question.

Il se trouve que le physicien a besoin, lui aussi, de la définition du mathématicien. Mais cela ne saurait faire oublier que le mathématicien, autant que le physicien, travaille *aussi* sur la notion *intuitive* d'infiniment petit ; c'est sur elle qu'on s'appuie pour comprendre ce qu'on appelle le ds^2 d'une surface, voire d'une variété Riemannienne multidimensionnelle (et je renvoie à l'article fondateur de Riemann (15), texte à la fois intuitif et abstrait qui décrit plus qu'il ne définit ce qu'est une telle variété, et à l'ouvrage de Weyl déjà cité), même si c'est l'étude formelle qui permet de construire des méthodes de calcul rigoureuses, encore que ces méthodes ne prennent leur pleine signification qu'au confluent du formel et de l'intuitif.

Tout cela pour dire que la différentielle du physicien et la différentielle du mathématicien sont les mêmes à travers leur double aspect et que cette distinction relève bien plus de *l'idéologie du concret et de l'abstrait* que de la pensée scientifique.

Mathématiques du physicien, mathématiques du mathématicien.

Je parlerai encore une fois de l'étudiant en licence ou en maîtrise de mathématiques, toujours heureux d'en avoir fini avec la physique et qui accepte difficilement qu'on s'y réfère dans un cours de mathématiques. La méconnaissance de ces mathématiques du physicien (comme on les appelle parfois avec quelque condescendance) est un manque important dans la culture du futur "matheux", surtout du futur professeur de mathématiques, voire un handicap pour la compréhension de certains concepts mathématiques.

L'exemple canonique est celui de l'analyse vectorielle ; personnellement, c'est à travers la mécanique et l'électromagnétisme que j'ai compris non seulement son intérêt, mais aussi sa signification, signification mathématique ou signification physique, peu importe ; d'ailleurs la distinction a-t-elle un sens ?

Comme si, par exemple, pour le mathématicien, le seul problème de la formule de Stokes était sa démonstration, laquelle, si on la veut faire rigoureusement, est difficile et requiert un niveau élevé de connaissances mathématiques, alors que sa signification peut être abordée plus tôt via la géométrie, la mécanique ou l'électromagnétisme d'une façon tout aussi rigoureuse (je parle ici moins de rigueur technique que de rigueur de pensée) ; et c'est la compréhension de cette signification et des problèmes qu'elle pose qui permet de comprendre le besoin d'une démonstration rigoureuse sur le plan technique et la façon dont cette démonstration se construit, reliant ainsi les démonstrations élémentaires insuffisantes et les démonstrations rigoureuses telles qu'on les trouve par exemple dans l'ouvrage classique de Lichnérowicz (16) ou dans celui de DeRham (17). On pourrait rappeler ainsi les "démonstrations" du théorème de Gauss (le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal, à un facteur près dépendant des unités choisies, à la somme des charges situées à l'intérieur de la surface), démonstrations qu'on trouve dans les ouvrages de physique et qui expliquent la relation entre la propriété énoncée par le théorème et la loi en $1/r^2$; je renverrai ici au vieux cours de Mathématiques Spéciales de Lamirand et Joyal (18) et au cours de physique de Feynman dans lequel les mathématiques apparaissent via les problèmes de physique, rappelant que le lien entre mathématiques et physique se situe au niveau des concepts.

On pourrait multiplier les exemples, montrant l'intérêt d'une lecture *physique* de certains problèmes mathématiques, moins pour y trouver un modèle concret (!) que pour permettre une approche intuitive reliant les aspects formels et les significations intuitives.

Le problème est alors, d'une part de savoir lire dans l'écriture formelle des calculs les significations intuitives, d'autre part de traduire formellement ces significations intuitives ; si cette intuition mathématique est portée par la physique, ce n'est pas seulement que la physique utilise les mathématiques, fournissant à cette dernière des images qui seraient concrètes (la physique n'est pas plus concrète que les mathématiques, l'électromagnétisme n'est pas une représentasentation concrète de l'analyse vectorielle), mais parce que physique et mathématiques s'entremêlent et c'est cet entremêlement qui est porteur de significations dans chacun de ces deux domaines de la connaissance.

Alors, pourrait-on dire que l'article de Bernard Diu a le mérite de rappeler au "matheux" que le vecteur du physicien est aussi celui du mathématicien ? L'intérêt du mathématicien pour la physique n'est pas seulement une ouverture vers une discipline voisine, c'est un moyen de comprendre sa propre discipline.

Notes :

1) Eliane Cousquer, Le Calcul Vectoriel, in Groupe inter-Irem Epistémologie, *La Rigueur et le Calcul*, Cedic, Paris, 1982 ; Michaël J.Crowe, *A history of vector analysis* (1967), Dover, New York, 1985.

2) Paul Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, Gauthier-Villars, Paris 1893/1941.

3) Georges Bruhat, *Cours de Physique Générale*, Masson, Paris.

4) Albert Châtelet et Kempé de Fériet, *Calcul vectoriel*, Gauthier-Villars, Paris 1924.

5) Georges Bouligand, *Initiatiòn aux méthodes vectorielles*, Vuibert, Paris 1926/1947.

6) Georges Bouligand, *Leçons de géométrie vectorielle*, Vuibert, Paris 1924/1949.

7) Raoul Bricard, *Calcul vectoriel*, Armand Colin, Paris.1929/1950.

8) Robert Deltheil, Daniel Caire, *Compléments de Géométrie*,Baillère et Fils, Paris 1951, réédition in *Géométrie et Compléments*, Gabay, Paris 1989.

9) Giuseppe Peano, *Calcolo geometrico*, Fratelli Bocco Editori, Torino 1888.

10) Hermann Weyl, *Space, Time, Matter*, (1918) (english translation Brose) Dover, New York 1952.

11) Eliane Cousquer (*Op.cité*).

12) Rudolf Bkouche, *Enseigner la Géométrie*, Bulletin APMEP n°355 Septembre 1985.

13) Paul Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press 1934/1948.

14) Carl Friedrich Gauss, *Recherches sur les surfaces courbes (1827)* (traduction française Roger), Blanchard, Paris 1967.

15) Bernhard Riemann, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie (1854)* (traduit par Jules Hoüel) in *Œuvres Mathématiques*, Blanchard, Paris 1968 ; réédition Gabay, Paris 1990, page 281.

16) André Lichnérowicz, *Algèbre et Analyse linéaires*, Masson, Paris 1947.

17) Georges de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris 1955.

18) Lamirand, Joyal, *Cours de Physique*, Masson, Paris.

19) Feynman, Leighton, Sands, *Le cours de Physique de Feynman, Electromagnétisme 1* (version française : Crémieu, Duboin, Jancovici, Lurçat) Interéditions, Paris 1979.