Mathématiques ici et ailleurs

Fonctions hyperboliques :

une approche par analogie.

Neil Bibby
(school of education, University of Exeter)
Graham Hoare
(Dr Challoner's Grammar School, Amersham, Bucks)
Traduit par **Frédéric METIN**
(IREM de Reims).

Cet article a été publié sous le titre *«Hyperbolic Functions : an approach by analogy»* in «Teaching Mathematics and applications», Vol 8, n°1, 1989.

(*) Les notes ont été regroupées en fin d'article

Nous avons tous deux longtemps été peu satisfaits de l'introduction aux fonctions hyperboliques habituellement offerte par les textes en usage au niveau Baccalauréat ("A-level") et souvent régurgitées par un bon nombre d'études nouvelles ou révisées "post-tronc-commun". Dans l'approche usuelle, ch x et sh x sont définis directement en termes de fonctions exponentielles : ainsi, la plupart de ces études mentionnent rarement le mot "Hyperbole" et manquent par là-même un développement par analogie avec les fonctions *circulaires*. Au mieux, semble-t-il, l'analogie est justifiée par une référence ultérieure au lien qui existe entre les identités hyperboliques et circulaires(*). Cependant, une étude basée sur la recherche d'une paramétrisation de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, analogue à celle du cercle $x^2 + y^2 = 1$, semble pratiquement inexistante. Pour notre part, nous utilisons une telle approche apparemment avec succès depuis de nombreuses années et voulons par cet article mettre en évidence ses grandes lignes. Elle est à l'origine très semblable à l'approche historique, défendue pour la première fois par V.Ricatti en 1757, puis développée par J.H.Lambert en 1761 et 1768. Pour une tentative plus récente de fournir une justification géométrique de ch x et sh x, reportez-vous à la référence 4 de la bibliographie.

1-Une paramétrisation analogique :

La première étape consiste à se dire que puisque le cercle $x^2 + y^2 = 1$ peut être paramétré par (cos u, sin u), où u /2 est l'aire du secteur circulaire OAP dans la figure 1, alors il devrait être possible de paramétrer l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ par un couple similaire de fonctions, avec un paramètre défini d'une manière analogue (fig.2). Nous considèrerons l'autre paramétrisation donnée par (sec, tan) dans le paragraphe 2.

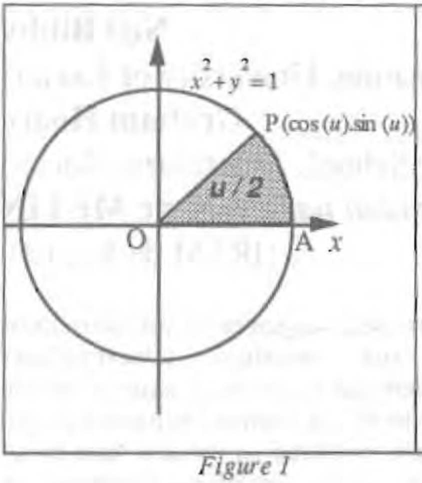


Figure 1

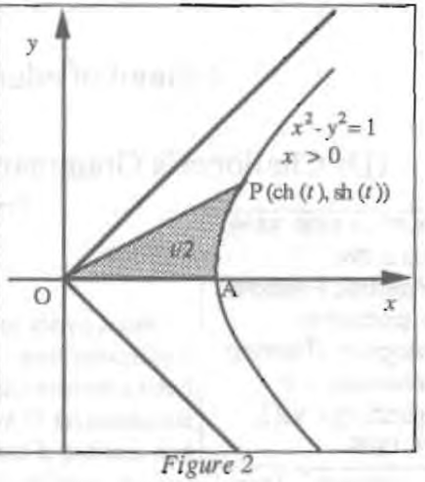


Figure 2

Quelques antécédents importants permettront aux étudiants d'accepter d'autant mieux ce postulat. Tout d'abord, la compréhension de l'analogie dépend du fait d'avoir déjà considéré cosinus et sinus eux-mêmes comme paramétrisation du cercle. Mais comme ces fonctions sont encore décrites comme "trigonométriques", il est fort probable que les étudiants persisteront dans une conception du type "triangle rectangle" plutôt qu'en association avec le cercle. Il est ensuite nécessaire d'envisager la signification géométrique du paramètre ; celle qui apparaît avec la plus grande évidence est la longueur de l'arc, mais il pourrait y avoir une intéressante discussion (éventuellement à l'initiative de l'enseignant grâce à quelques rappels des formules donnant la longueur de l'arc et l'aire du secteur), si l'on se demande dans quelle mesure la longueur de l'arc est le seul paramètre possible et si elle est bien adaptée au cas hyperbolique (**).

L'étape suivante consistera, pour les étudiants, à essayer de "voir" le comportement des nouvelles fonctions ch x et sh x :

a) en l'étudiant pour des valeurs extrêmes de t (bornées ?)

b) en étudiant leur éventuelle parité, périodicité, etc;...

c) en chercaent quelques valeurs grossières par des mesures sur une représentation graphique telle que la figure 2.

La dernière étape est analogue à l'approche élémentaire des fonctions trigonométriques dans laquelle les élèves mesurent en général les coordonnées pour des valeurs de l'angle allant de 10° en 10° sur un cercle trigonométrique.

Cependant, il reste à savoir comment évaluer ch x et sh x (et donc les relier aux fonctions exponentielles). Il est par exemple possible de suggérer aux étudiants de regarder la figure 2, de telle sorte que la droite $y = x$ apparaisse verticale et la droite $y = - x$ horizontale, comme dans la figure 3 (ce qui est facile avec la tête ou un rétroprojecteur mais pas évident avec un tableau!°.

Une autre possibilité (mais c'est vraiment leur mâcher le travail) est d'ajouter la zone ombrée de la figure 4 au schéma de la figure 2, ce qui peut être très simplement réalisé par une superposition sur le rétroprojecteur ; on

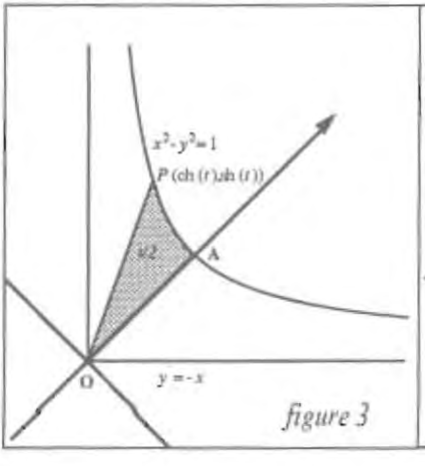


figure 3

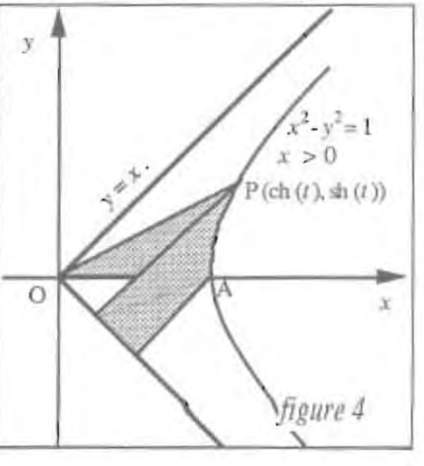


figure 4

doit ensuite considérer la relation qui existe entre cette aire et celle du secteur hyperbolique.

Ces schémas peuvent provoquer un enchaînement de pensées fécond : ils suggèrent l'existence d'une courbe assez proche, l'hyperbole $xy = -1$, qui offre une aide potentielle pour l'évaluation de ch x et sh x, puisque les aires qu'elle définit sont données par la fonction logarithme. A cette étape, il sera utile que les étudiants se souviennent des diagrammes suivants (fig. 5 et 6).

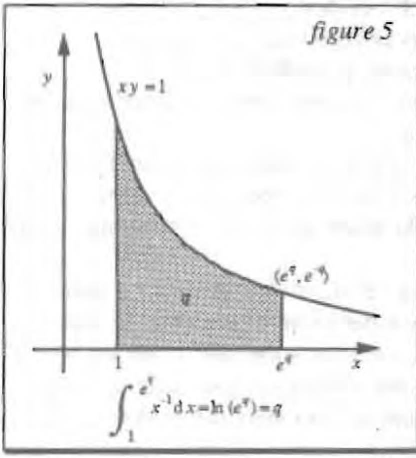


figure 5

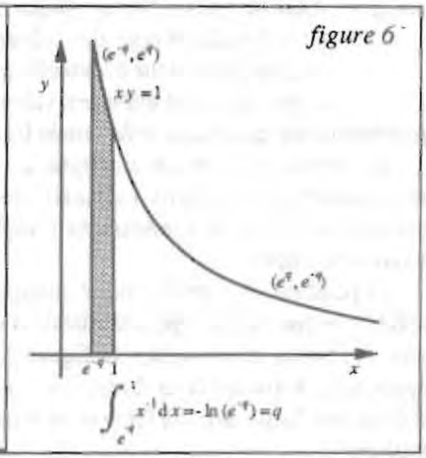


figure 6

Il est maintenant presque évident qu'une simple suite d'applications linéaires transformera $x^2 - y^2 = 1$ en $xy = -1$, comme on peut le voir dans les figures 7, 8 et 9, où R représente une rotation d'angle $\pi/4$ et E un agrandissement de facteur $\sqrt{2}$ (tous deux laissant l'origine invariante).

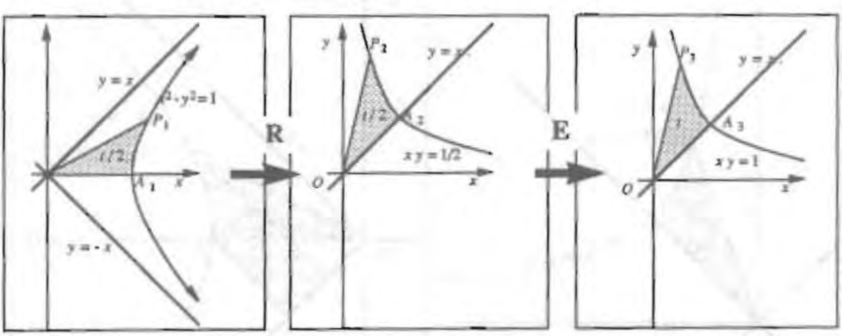
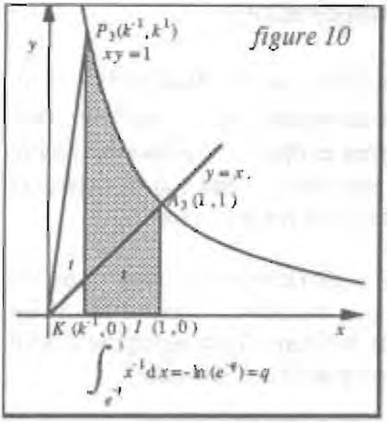


figure 7 *figure 8* *figure 9*



L'aire du secteur OA_3P_3peut maintenant être regardée comme égale à celle de IA_3P_3K (griséet dans le figure 10), si l'on considère les triangles OA_3I et OP_3K. Puisque P_3 est sur la courbe $xy = 1$ (avec $0<x<1$), ses coordonnées sont du type (k^{-1}, k) pour un certain $k > 1$. En comparant ensuite les figures 10 et 6, il apparaît clairement que $k = e^{t}$. Les coordonnées de P_3 sont donc (e^{-t}, e^{t}).

Sachant que les coordonnées de P_3 sont des fonctions exponentielles de t, nous pouvons les relier à celles de P_1. Souvenons-nous que $P_3 = E(R(P_1))$ et que P_1 et P_3 ont respectivement pour coordonnées $(\mathrm{ch}x, \mathrm{sh}x)$ et (e^{-t}, e^{t}) nous avons, par la bijection réciproque : $P_1 = R^{-1}(E^{-1}(P_3))$; en termes de matrices :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, t \\ \mathrm{sh}\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

d'où
$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, t \\ \mathrm{sh}\, t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t} + e^{-t} \\ e^{t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

et donc $\mathrm{ch}\, t = 1/2\,(e^{t} + e^{-t})$ et $\mathrm{sh}\, t = 1/2\,(e^{t} - e^{-t})$

Evidemment, toute la clarté de ce raisonnement vient de l'utilisation des matrices, et une certaine habitude de celles-ci serait donc aussi un prérequis essentiel pour tout étudiant se servant de cette approche. Ceux qui sont *très* familiers des matrices pourraient même être assez satisfaits d'utiliser la similitude spirale (ou agrandissement rotatif) $R^{-1}E^{-1}$, dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, comme moyen direct de transformer $xy = 1$ en $x^2 - y^2 = 1$.

2- Une autre paramétrisation ; comparaison :

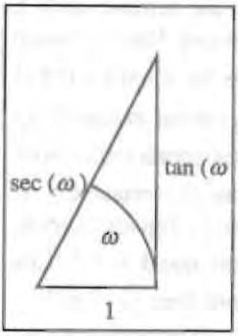


figure 11

Il est assez possible que les étudiants qui se souviennent de l'identité appropriée (i.e. $\sec^2(\omega) - \tan^2(\omega) = 1$), ou considèrent la figure 11, proposent l'autre paramétrisation $x = \sec(\omega)$, $y = \tan(\omega)$ et regardent donc ch x et sh x comme des fonctions superflues.

Dans ce cas, la signification géométrique du paramètre ω n'est pas évidente. Cependant, si un diagramme du type de la figure 11 est superposé à celui de la figure 12, elle apparaît plus clairement.

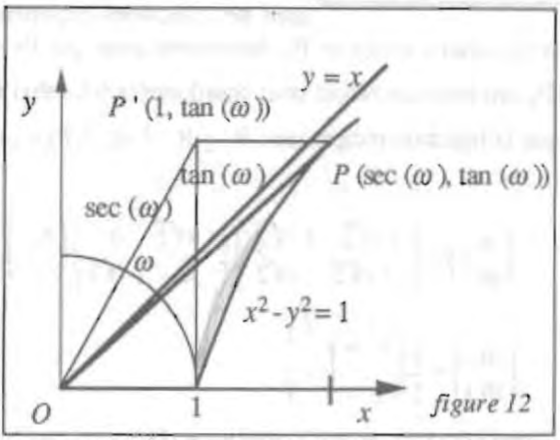


figure 12

A chaque point de la demi-hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ et $x>0$ correspond une longueur d'arc ω qui mesure l'angle P'Ox, P' étant le projeté de P sur la droite $x = 1$ (figure 12). On voit immédiatement que ω est restreint à l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$. Si nous appliquons de nouveau R et E successivement au point P paramétrisé maintenant comme $(\sec(\omega), \tan(\omega))$, nous avons :

E (R (P_1)) = P_3, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sec(\omega) \\ \tan(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$

d'où $\sec(\omega) + \tan(\omega) = e^{t}$ ou $\ln(\sec(\omega) + \tan(\omega)) = t$.

Bien qu'une telle correspondance entre les deux paramètres ait déjà pu être suspectée (***), on peut maintenant envisager de nouvelles considérations sur la relation existant entre eux. Supposons que f est la fonction donnée par $f(\omega) = ln\,(sec\,(\omega) + \tan(\omega))$ avec $-\pi/2 < \omega < \pi/2$; alors f transforme un paramètre égal au double de l'aire du secteur *circulaire* en un autre égal au double de l'aire du secteur *hyperbolique* (voir figure 13). La comparaison entre les deux représentations graphiques en donne une idée plus claire (voir fig.14).

figure 13

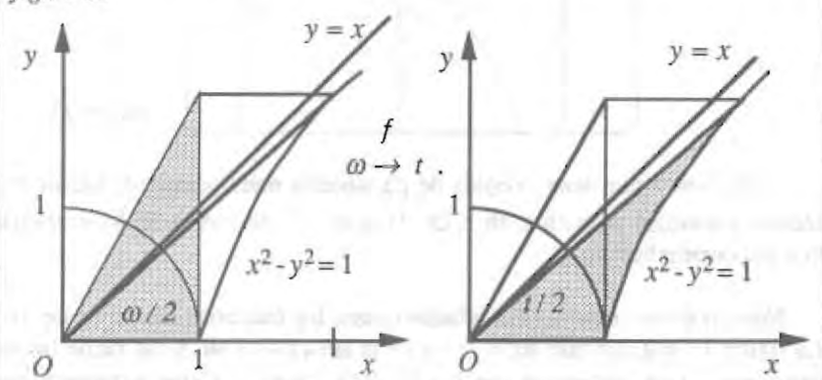
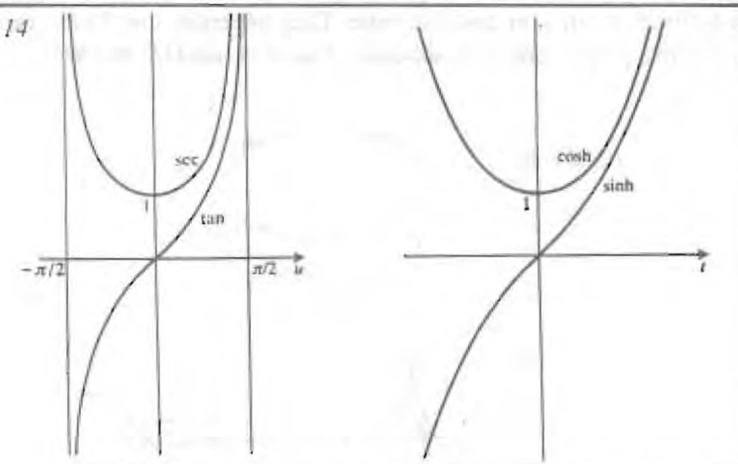


figure 14



Il est donc possible de regarder les courbes représentatives de ch x et sh x comme dérivant de celles de sec (ω) et tan (ω) par la transformation bijective f, définie par $f(\omega) = \ln(\sec(\omega) + \tan(\omega))$ de l'intervalle $]-\pi/2\,,\pi/2[$ sur **R** entier. La figure 15 est la représentation graphique de f.

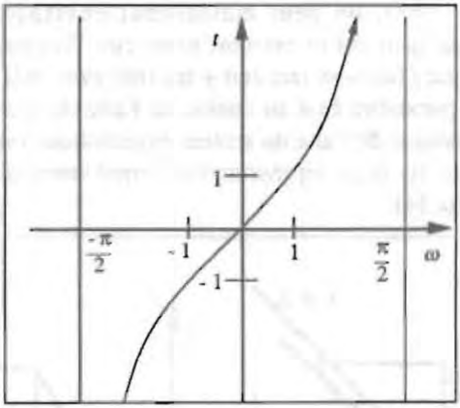


figure 15

Cette vision des deux couples de paramètres nous permet d'obtenir les identités standard pour ch x, sh x, ch ^{-1}x et sh ^{-1}x en termes de logarithmes et d'exponentielles etc…

Nous pouvons résumer les relations entre les fonctions par la figure 16. La figure 17 suggère que sec $\circ f^{-1}$ = ch et tan $\circ f^{-1}$ = sh. Il est facile (mais ennuyeux…) de démontrer que tan $(f^{-1}(t))$ donne la forme exponentielle habituelle de sh t, et ainsi de suite. Cela nécessite une forme facilement inversible pour f, qui est la suivante : $f(\omega) = \ln(\tan(1/2\ \omega + \pi/4)$.

Figure 16

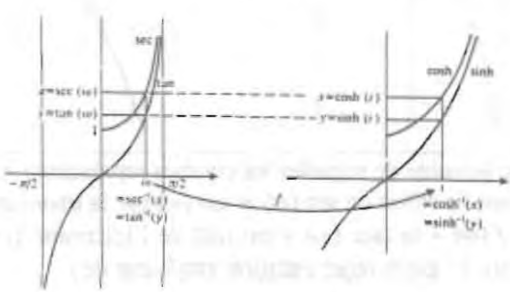
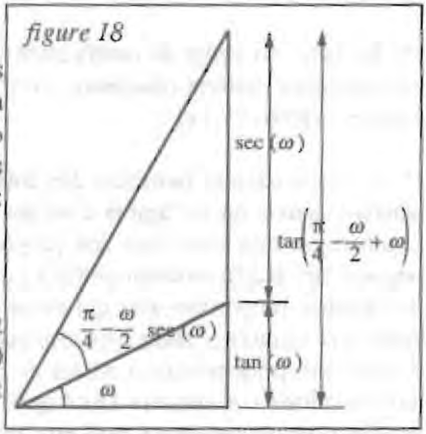


Figure17

L'identité tan $(1/2\ \omega + \pi/4) = \sec(\omega) + \tan(\omega)$ est trivialement suggérée par la figure 18.



Il est encore plus facile d'avoir les expressions de $\mathrm{ch}^{-1}\,x$ et $\mathrm{sh}^{-1}\,x$ en partant de $\mathrm{ch}^{-1} = f \circ \sec^{-1}$ et $\mathrm{sh}^{-1} = f \circ \tan^{-1}$ et après quelques simplifications, on obtient :

$\mathrm{ch}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

et $\mathrm{sh}^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

(les domaines sont implicitement restreints à $u \geq 0$ pour sec et à $t \geq 0$ pour ch, de sorte que $\sec^{-1}$ et ch aient un sens).

Les étudiants peuvent maintenant être exhortés à examiner les deux paramétrisations d'un point de vue critique (leurs mérites relatifs), et à se demander quel couple de paramètres ressemble le plus aux fonctions circulaires et lequel est le plus utile pour simplifier l'intégration.

3.Conclusion :

Nous avons esquissé une approche des fonctions hyperboliques ainsi que quelques autres considération qui, de notre point de vue, est au moins *motivante*, et qui fait référence d'une manière plaisante à quelques différentes parties du programme de terminale ("sixth form").

Nous serions heureux de savoir si des enseignants ont adopté certaines de ces idées ou les utilisent déjà, en vue d'un échange possible d'idées sur ce sujet.

Références :

1) Courant et John : "*Introduction to Calculus and Analysis*", Interscience 1965.
2) Bacon : "*Differential and Integral Calculus*", Mc Graw-Hill, 1955.
3) Lambert : "*Opera Mathematica*", Orell Füssli Verlag, 1948.
4) Rosenthal : "*An introduction to Hyperbolic Functions*" in "Mathematic Teacher", avril 1986.

Notes :

(*) De bons exemples de justification *a posteriori* de ch x et sh x en termes géométriques existent cependant ; voir par exemple les chapitres concernés dans les références 1 et 2.

(**) Les étudiants familiers des lois de Kepler et des orbites centrales peuvent trouver qu'il s'agit là d'un bon choix plus naturel pour le paramètre. Lambert est très clair dans son propos : «Les *sinus* et *cosinus* circulaires peuvent être indifféremment reliés à l'*arc*, à l'*angle* ou au *secteur*, à cause de la constante proportionnalité qui existe entre eux. Il n'en est pas de même eu égard aux *cosinus* et *sinus hyperboliques*. C'est au secteur que ces fonctions doivent être principalement reliées de façon à les rendre vraiment analogues aux fonctions *circulaires*» Quoi qu'il en soit, l'ultime choix de l'aire du secteur comme paramètre doit être imposé en douceur par l'enseignant si cette approche est à mener plus loin.

(***) Si une évaluation de $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\, dy$ chacune des substitutions $y = \text{sh}\, t$ et $y = \tan \omega$, cette relation entre t et ω est obtenue en égalisant les deux formes de $I(x)$ qui en résultent.