Dans nos classes

Deux idées générales et leur illustration dans le domaine des suites numériques

Claude Pariselle
IREM de Grenoble

PREMIÈRE IDÉE

A Si on veut introduire une notion nouvelle à partir de l'étude d'une situation (ce qui n'est d'ailleurs pas la seule façon d'introduire une notion nouvelle), il est indispensable

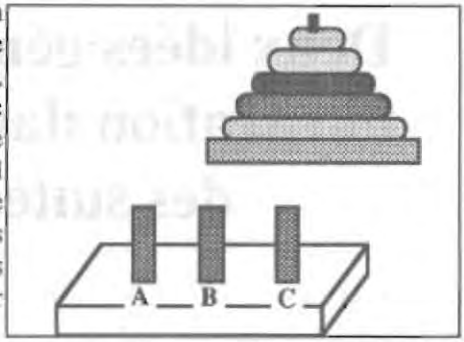
1- de trouver une situation qui mette très **pertinemment** en relief cette notion,

2- de laisser aux élèves **le temps**, dans cette première situation, de s'approprier le concept en passant par les tâtonnements, les compréhensions partielles ou "de travers" qui, au bout du compte, pourront déboucher sur l'assimilation du concept.

Dans l'étude des suites numériques en 1ère S, le concept nouveau (outre la difficulté liée à la notation individuelle) que les élèves ont à acquérir, est celui de la récurrence.

Il y a quelques années, je choisissais mes premiers exemplre de suites définies par récurrence en recherchant la simplicité : je leur rappelais qu'au CE1, ils avaient appris à connaître les entiers pairs et les entiers impairs en comtant «de deux en deux». Mais, dans ces exemples très simples, la définition fonctionnelle directe était si accessible et si présente qu'elle masquait la démarche que je voulais leur exposer : à partir d'une suite qui se trouvée (généralement et par nécessité) définie par récurrence, obtenir si possible, par souci de commodité, une définition fonctionnelle.

J'ai alors cherché une situation où les élèves soient forcés de définir eux-mêmes par récurrence, une suite. J'ai apporté en classe le jeu de la Tour de Hanoï. (le matériel est facile à rassembler : il suffit de «voler» à un bébé iune série d'anneaux de tailles différentes et de visser trois morceaux de manche à balai sur une planchette).



Et j'ai expliqué la règle du jeu : *trouver, selon le nombre d'étages de la tour, le nombre de coups minimal pour déplacer la tour de A à B (ou à C) en respectant les consignes suivantes :*

- *ne déplacer qu'un étage à la fois,*
- *n'utiliser que les emplacement A, B ou C,*
- *ne jamais poser un étage sur un étage plus petit.*

La règle a été vite comprise (deux minutes d'illustration avec le matériel apporté ont suffi). Les élèves ont immédiatement eu envie de chercher en manipulant eux-mêmes et se sont constitué sans mal un matériel (piles de gommes, petits papiers de différentes tailles).

Le travail de confrontation des résultats pour , 4, 5 étages s'est fait tout seul. Nous avons inscrit les résultats optimaux (jusqu'à nouvel ordre) dans un tableau :

nombre d'étages n	1	2	3	4	5
nombre d'étages n	1	3	7	15	31

Puis, j'ai demandé si l'on pouvait continuer à réfléchir pour un nombre n d'étages non précisé. Comme prévu, l'idée au pour déplacer la tour T_n, il faut

➡ d'abord libérer l'étage inférieur ;

➡ puis le déplacer,

➡ enfin «remonter» tous les autres étages,

est venue facilement (si l'idée ne vient pas, l'enseignant n'a pas de mal à faire, sans commentaires, quelques manipulations qui favorisent cette découverte).

Il s'agit alors de traduire cette idéepar une «formule». C'est là qu'il ne faut pas rater le coche, et surtout, ne pas presser le mouvement. Car, avant d'arriver à écrire $f(n) = f(n-1) + 1 + f(n-1) = 2f(n-1) + 1$, certains élèves vont proposer des formulations du genre $f(n) = 2(n-1) + 1$ qui révèlent une confusion (normale, à mon avis, à ce stade-là) entre les indices et les termes de la suite.

Si cette confusion n'est pas mise à jour, discutée, surmontée à ce moment, il faudra «y passer» une autre fois. Or, le plus tôt est évidemment le mieux (ce qui ne veut pas dire qu'on aura définitivement éliminé tout risque de voir cette confusion se reproduire).

A ce stade de la séance, on doit faire le point :

➡ observer la formule $f(n) = 2f(n-1) + 1$

➡ la faire *fonctionner* (demander par exemple aux élèves de calculer $f(10)$)

➡ la commenter (on calcule «de proche en proche»),

➡ en voir les limites (demander par exemple aux élèves de calculer $f(100)$)

➡ et éventuellement introduire le vocabulaire : suite de nombres définie par récurrence.

On peut ensuite, si la classe «en redemande», aborder l'étape suivante : rechercher une façon de démontrer la relation fonctionnelle $f(n) = 2^n - 1$ (assez facilement conjecturée par les élèves après observation des premiers termes de la suite : 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ...) et introduire à cette occasion un premier raisonnement par récurrence.

Il faudra, de toute façon, lors d'une autre séance, faire évoluer les notations (de la notation fonctionnelle à la notation indicielle) en prenant le temps de faire de nombreux exercices sur les indices pour y habituer les élèves et les aider à surmonter la gêne de cette nouvelle notation.

DEUXIÈME IDÉE

B Face au volume important de connaissances à acquérir en deux ans de Première et Terminale Scientifiques, les élèves ont besoin de l'aide des professeurs pour **structurer ces connaissances**.

Si on prend l'exemple des suites, les élèves doivent choisir des techniques adaptées à la situation qu'ils ont à étudier : l'utilisation du programme de la fonction f enregistré sur une calculette, de la représentation graphique de f, l'étude des variations de la suite, de sa convergence éventuelle ne se feront pas de la même façon selon qu'il s'agit de la suite définie par $u_n = f(n)$ ou par $u_n = f(u_{n-1})$ (et la donnée du terme initial).

Ayant remarqué que certains élèves choissisaient des techniques inadaptées parce qu'ils n'avaient pas pris le temps de réfléchir et de bien comprendre comment la suite avait été définie, j'ai décidé de faire, en début de Terminale C, une séance de «révision» des connaissances de 1ère S centrée sur mla distinction entre l'aspect «fonctionnel» et l'aspect «récurrent» des suites.

Pour commencer la séance, j'ai demandé aux élèves de retrouver la définition d'une suite. Il a suffit de peu de temps pour obtenir l'énoncé : *"C'est une application de* **N** *(ou de* **N** *privé de quelques éléments) dans* **R**" .
J'ai alors attiré leur attention sur les deux mots-clé :
1- **"fonction"** nous renvoie à un domaine mathématique dans lequel nous avons déjà beaucoup de connaissances et de techniques disponibles.
2- Ce qu'il y a de nouveau dans les suites, c'est que l'ensemble de définition est **N** (au lieu de **R** ou d'un intervalle de **R**). En faisant parler les élèves, je les ai aidés à exprimer ce qu'il y avait de particulier dans **N** (chaque élément à un «suivant» et un «précédent», sauf 0 qui est «le premier») et ils ont pu retrouver que l'aspect particulier des suites est la possibilité de les définir (et de les étudier) par récurrence, et que cet aspect est lié à la structure discrète de **N**.

Je leur ai alors demandé de dire pêle-mêle tous leurs souvenirs concernant les suites (en particulier les suites arithmétiques et géométriques beaucoup étudiées en 1ère S) et lorsque tout a été écrit au tableau, nous avons fait le tri en reconnaissant ce qui était «fonctionnel» et ce qui était «récurrent» (pour mieux illustrer, nous encadrions en rouge ou en jaune, selon le cas).

Certains élèves ont ainsi découvert que les suites arithmétiques se rattachent à la notion de fonction affine, alors que la caractérisation par le fait que la différence de deux termes consécutifs est constante, était bien perçue par tous comme une définition récurrente.

Dans toute la suite du cours, j'ai continué à mettre l'accent sur la distinction entre ces deux aspects, et sur les techniques différentes envisageables dans chaque cas (utilisation du graphique, techniques d'étude du sens de variation, méthodes pour étudier la convergence).

J'espère que, entraînés à se poser la question : *« $u_n = f(n)$ ou $u_n = f(u_{n-1})$? »*, mes élèves se tromperont moins souvent de boîte à outils.

BOITE A OUTIL

ETUDE D'UNE SUITE

QUESTION PRIMORDIALE

Comment la suite est-elle définie ?
ou : Comment me propose-t-on de calculer un terme ?

→ **A partir de son "rang" n** (c'est à dire de son numéro d'ordre dans la liste)

On me fournit une fonction qui me permet de calculer u_n à partir de n : $u_n = f(n)$.

✱ *Si je sais étudier la fonction f* prolongée à $\mathbf{R}^+$, j'en déduis le sens de variation de la suite (u_n) lorsque n décrit $\mathbf{N}$, et la limite de u_n lorsque $n \to \infty$

✱ *Si je sais tracer la représentation graphique de f* prolongée à $\mathbf{R}^+$, les points d'abscisse entière représentent la suite (u_n).

→ **A partir du terme précédent**

On me fournit une fonction qui me permet de calculer u_n à partir de u_{n-1}, ou u_{n+1} à partir de u_n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarques :

➤ Comme je ne peux calculer que «de proche en proche», il faut que je fasse le calcul *de tous les termes jusqu'à celui qui m'intéresse*. Si j'ai programmé f, je devrai donc «faire tourner» le programme n fois à partir de u_0 pour enfin connaître u_n.

➤ Encore faut-il que je connaisse u_0 !

Comment étudier la suite (u_n) ?

a) J'en reste à la définition récurrente :

➡ Pour les résultats (vriation, convergence) que l'on me demande de démontrer, ou que j'ai conjecturés, je peux chercher *des preuves par récurrence* (car je n'ai accès à la suite que de façon récurrente).

➡ Si la suite converge (mais, converge-t-elle ? puis-je le démontrer ?) sa limite est une solution de l'équation $x = f(x)$.

[En effet, si u_n a pour limite l et si f est continue,

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l \text{ et donc } f(l) = l \text{]}$$

***b) J'essaie** (parfois à l'aide de l'énoncé) **de conjecturer puis de prouver (1) une égalité fonctionnelle du type $u_n = g(n)$** (ce n'est pas la même fonction!)*

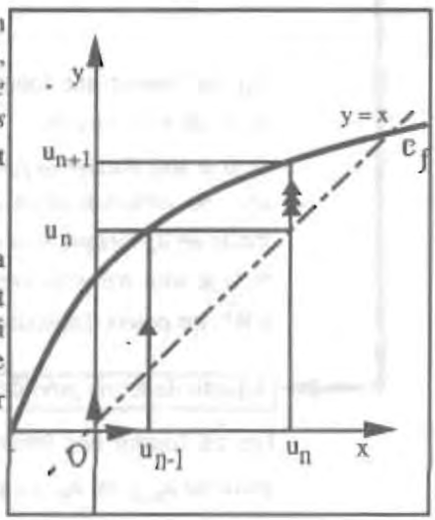
Je suis alors ramené au cas ou u_n est défini à partir du rang n.

Graphique :

Si je sais tracer la représentation graphique de f en repère orthonormé, *j'aurai besoin à chaque étape de «rabattre» u_n sur l'axe des abscisses* de façon à en déduire graphiquement l'ordonnée correspondante :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Pour rabattre u_n, je peux utiliser la droite d'équation $y = x$ en imaginant un pliage autour de cette droite qui replace u_n sur l'axe des abscisses. Je suis alors prêt à repartir chercher u_{n+1}



(1) Devinette : quel genre de preuve ?

SUITES ARITHMÉTIQUES

On passe de (1) à (2) par un raisonnement par récurrence

(1) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r & (r \text{ réel donné}) \\ u_0 \text{ réel donné} \end{cases}$

C'est une définition récurrente : on passe du terme u_n au terme suivant u_{n+1} en ajoutant r.

Je *reconnaîtrai* qu'une suite est *arithmétique* lorsque j'aurai constaté que la différence entre deux termes consécutifs est *constante*.

(2) $u_n = u_0 + nr$ (u_0 et r réels donnés)

C'est une définition fonctionnelle : on peut calculer directement le terme u_n à partir de son rang n.

Je *reconnaîtrai* qu'une suite est *arithmétique* lorsque j'aurai constaté que la différence entre deux termes consécutifs est *constante*.

Alors,
- De quelle fonction s'agit-il ?
- Comment sont disposés les points (n,u_n) de la représentation graphique ?
- Qu'est ce qui détermine le sens de variation de la suite ? Et sa limite lorsque $n \to \infty$?

Exercice : Réécrire la fiche ci-dessus pour les suites géométriques.