Examens et concours

Un exemple de divergence
de vocabulaire entre enseignants
et ses conséquences sur les examens

Commission MOTS

Notre collègue Frédéric MARTIN de Niort-sur Erdre, a communiqué à Jean CAPRON ses réflexions sur une partie du sujet du Brevet des Collèges de 1990 dans l'Académie de Nantes.

L'exercice 3 donnait huit phrases concernant «racines carrées» et demandait de recopier celles qui étaient vraies. Deux d'entre elles lui ont posé problème :

d) (-3) est la racine carrée de 9
e) 9 est la racine carrée de 81

Citons F.Martin :

«L'emploi de l'article défini *la* pouvait signifier que l'on affirmait l'unicité de la racine carrée (ce qui n'est pas toujours évident en français dans une phrase comme "Jean est *le* fils de Pierre"), auquel cas, les deux propositions étaient fausses. En tout état de cause, cette question me paraissait d'une extrême subtilité pour des élèves de Troisième. Il en était en fait tout autrement, les auteurs du sujet considérant qu'un réel positif n'a qu'une racine carrée, le nombre *positif* qui a pour carré ce réel.

Je donnais, pour ma part, jusqu'à présent, comme définition "a est une racine carrée de b ssi $a^2 = b$" et "tout nombre réel strictement positif b a deux racines carrées opposées, notées $\sqrt{b}$ et - $\sqrt{b}$

Conscient de l'ambiguïté que peut amener la lecture du symbole $\sqrt{b}$, j'expliquais à mes élèves que $\sqrt{b}$ se lisait par abus «racine carrée de *b*» ou même «racine de *b*», mais qu'il valait mieux le lire «racine carrée positive de *b*».»
Il existe donc des divergences entre professeurs sur «racine carrée».

2 - Rappelons d'abord les théorèmes et les notations sur lesquelles, semble-t-il, tout le monde s'accorde :

> Etant donné un nombre a, l'équation d'inconnue x , $x^2 = a$ admet :
>
> - dans $\mathbf{R}^+$, quel que soit le nombre réel positif ou nul a, une solution unique, qui se note $\sqrt{a}$, ce qui peut se lire «radical de a» ou «radical a» puisque le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle «radical» (et la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ des calculettes peut s'appeler la «touche radical») ;
> - Dans $\mathbf{R}$, quel que soit le nombre réel strictement positif a, deux solutions opposées l'une de l'autre, notées $\sqrt{a}$ pour celle qui est positive, et tout naturellement - $\sqrt{a}$ pour celle qui est négative ;
> - Dans $\mathbf{C}$, quel que soit le nombre complexe a, deux solutions, opposées l'une de l'autre, sans qu'il existe de symbole spécifique.

3 - Les désaccords commencent à propos des *noms* à donner aux solutions.

Une ***première attitude*** -c'est celle de F.Martin- consiste à appeler «racine carrée de a» tout nombre dont le carré est a, c'est-à-dire toute solution de l'équation $x^2 = a$, quel qu'en soit le référentiel ($\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$).
Dès lors, en reprenant ces trois référentiels :

> - Tout nombre complexe a deux racines carrées (com-plexes) ;
>
> - tout nombre réel strictement positif a deux racines carrées (réelles), l'une positive $\sqrt{a}$, qui est la *racine carrée positive*, et l'autre, négative, - $\sqrt{a}$, qui est la *racine carrée négative*.
>
> - Si on se borne à $\mathbf{R}$+, seule $\sqrt{a}$ a pour carré a et continue à s'appeler «la racine carrée positive» de a (on l'appelait jadis «la racine carrée arithmétique».

Dans ces conditions, les phrases d) et e) du paragraphe 1 sont fausses ; (-3) est *une* racine carrée de 9, à savoir, la racine carrée négative ; 9 est *une* racine carrée de 81, à savoir la racine carrée positive.

Une ***deuxième attitude*** - c'est celle des auteurs du sujet en question - consiste, a étant positif, à décider que a n'a qu'une racine carrée et à la noter $\sqrt{a}$ qui se lit donc «racine carrée de a» ; $-\sqrt{a}$, elle n'a pas droit à la dénomination ; on dira donc que 3 est la racine carrée de 9 et (-3) est l'opposé de la racine carrée de 9.

Alors, la phrase d) est fausse et la phrase e) est vraie.

Comme toujours en pareil cas, la plupart d'entre nous adoptent l'une ou l'autre des deux attitudes et rejettent l'autre qu'ils attribuent aus «originaux qui ne parlent pas comme tout le monde (c'est-à-dire comme moi)».

4 - Les programmes tranchent-ils ?

En Quatrième, la notion n'intervient que dans la phrase : *«Calculer, en faisant éventuellement usage de la touche* $\boxed{\sqrt{\ }}$ *de la calculatrice, un côté d'un triangle rectangle à partir de la donnée des deux autres côtés».* Les mots «racine carrée», «radical» n'apparaissent pas.

En Troisième, on lit : *«Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées)»* ; cette formulation est ambiguë : ou bien elle implique que «radical» et «racine carrée» sont synonymes, donc que «racine carrée» est un symbole et pas un concept ; ou bien elle marque une différence entre les deux mais ne précise pas pour autant la signification de «racine carrée». En tout état de cause, le pluriel de «racines carrées» laisse (intentionnellement ?) le choix entre les deux attitudes. Les lignes suivantes du programme, les commentaires, ne prennent pas davantage parti.

Chaque enseignant de Collège a donc toute latitude de choisir ; mais il devient difficile (et c'est dommage) de poser au Brevet des Collèges des questions analogues à celles de Nantes.

(Les programmes de lycée ne sont pas plus explicites sauf en Terminale à propos de racine*s* nième*s* complexes de l'unité).

5 - Nous préférons la première attitude, car elle rappelle mieux que l'autre l'existence de *deux* nombres de carré a ; cette existence est souvent oubliée par les élèves du fait que les calculatrices n'en donnent qu'un, du fait aussi qu'engéométrie, seule la racine carrée positive importe. D'où l'erreur classique (qualifiée de MST * par J.-MChevallier): «$t^2 = 9$ donc $t = 3$ ».

Tant qu'on se borne à la racine carrée positive (c'est le cas en Quatrième), on peut lire $\sqrt{a}$ «radical de *a*» et ne pas prononcer le vocable «racine carrée». Lorsqu'on aborde (en Troisième) des équations du type $x^2 = a$ dans **R**, il est tout indiqué de parler de la racine carrée positive et de la racine carrée négative, et de lire $\sqrt{a}$, si on y tient, aussi bien «radical de *a*» que «racine carrée positive de *a*». L'extension à **C** pour les élèves qui auront à la pratiquer, ne posera pas de problème.

6 - Si le contexte le permet - c'est très souvent le cas au Collège, où on n'aborde pas les racines $n^{\text{ièmes}}$ si n est plus grand que 2 - on peut abréger «racines carrées» en «racines» tout court, quelle que soit l'attitude adoptée.

7 - Comme si l'affaire n'était pas déjà assez compliquée pour un élève de Troisième, le mot *racine* crée une confusion supplémentaire si on l'utilise à la place de *solution* pour une équation ; ainsi, avec la deuxième attitude : «Les racines de l'équation $t^2 = 9$ sont 3 (la racine de 9) et (-3) (qui n'est pas racine de 9)».

Il vaudrait mieux s'abstenir de remplacer *solution* par *racine*, lequel d'ailleurs ne s'utilise que pour certaines équations - dirait-on que 3 est la racine de $10^x = 1\,000$? - et ne se rencontre guère à propos des inéquations, des conjonctions (système) d'équations,...

Lire pages suivantes le point de vue d'Antoine BODIN

* Lire "Maladie Scolairement Transmissible". A.BODIN juge lui, le terme un peu abusif ici, se demandant "qui, dans un texte géométrique ou arithmétique, a besoin d'écrire autre chose" ?

Le point de vue d'Antoine BODIN...

> ...
> *Je ne sais pas ce que vous voulez dire par "honneur" dit Alice.*
> *Humpty Dumpty sourit de façon méprisante*
>
> *Bien sûr, vous ne pouvez pas savoir avant que je vous le dise.*
> *Ça veut dire qu'il y a un «solide argument» objecta Alice.*
>
> *Quand j'utilise un mot, dit Humpty Dumpty d'un ton dédaigneux, il signifie exactement ce que j'ai choisi de lui faire signifier, ni plus, ni moins.*
>
> *La question est de savoir si vous pouvez faire dire aux mots tant de choses différentes dit Alice.*
>
> *La question est de savoir ce qu'il s'agit de maîtriser dit Humpty Dumpty, c'est tout!*
>
> *(LEWIS CARROL - 1871)*
> *(traduction approximative - A.B.)*

Un nombre positif a-t-il une racine carrée ou deux ?

Faut-il considérer comme synonymes les deux expressions (c'est volontairement que je ne précise pas davantage les déterminants et le référentiel) : **«racine de l'équation $x^2 = a$»** et **«racine carrée de a»** ?

Voilà maintenant plus de trente ans que j'entends ces questions, avec, toujours, des défenseurs acharnés de réponses définitives et contradictoires.

Je n'ai pas fait le recensement des *Bulletins* de ces trente dernières années mais je doute que le sujet ne soit pas revenu plusieurs fois sur le tapis (vert).

Le texte proposé par la Commission "MOTS" a le mérite de poser le problème de façon claire et dans le cadre des examens. Il est en effet inacceptable (mais courant!) que des élèves puissent être sanctionnés pour avoir appris à parler comme leur professeur. Remarquons aussi qu'il ne s'agit que de langage : en effet, dès que la situation proposée présente un quelconque enjeu, lorsqu'il s'agit vraiment de trouver quelque chose de signifiant, le contexte apporte, en général, un éclairage suffisant pour que l'erreur ne risque plus guère de se prodnire.

En fait, nous avons à chaque fois affaire à un problème de référentiel non explicité.

Le problème est donc bien posé, mais je trouve la solution proposée un peu rapide, et je suggérerais volontiers, pour instruire le dossier, quelques éléments susceptibles, en complément de l'article de la Commission "MOTS", de faire avancer la cohérence de notre enseignement. L'expérience de la formation des enseignants m'a convaincu que, sur ce sujet, et sur quelques autres, chaque enseignant a un avis bien tranché qui tient à sa formation et à ses habitudes et qu'il ne sert à rien de lui demander de changer sans lui apporter en même temps des raisons sérieuses de changer.

Comment instruire le dossier ?

On peut proposer :

1°) Une étude historique et épistémologique de la notion.
2°) Une étude historique de l'évolution de la transposition didactique qui est faite de cette notion.
3°) Un examen attentif des programmes, des pratiques enseignantes et des manuels du moment.
4°) Un examen attentif des avantages et inconvénients tant des pratiques en cours que des modifications proposées.
5°) Si, après cela, la nécessité de modification subsiste, il convient de se donner les moyens d'une large diffusion de l'information accompagnée de documents de formation adressés directement aux IREM, MAFPEN et autres IUFM...

Quelques éléments pour nourrir ce dossier :

Les programmes :

Ceux de 1971 (Classe de troisième)
NOMBRES RÉELS, CALCULS ALGÉBRIQUES, FONCTIONS NUMÉRIQUES

Racines carrées ...Pour $a \geq 0$, la notation $\sqrt{a}$ est d'usage pour désigner l'unique nombre b vérifiant les conditions $b^2 = a$ et $b \geq 0$; **$\sqrt{a}$ est dit la racine carrée de a** ; on se gardera, pour éviter toute confusion, d'appeler les deux solutions de $x^2 = a$ ($a > 0$) les racines carrées algébriques de a.

Ceux de 1978 (Classe de troisième) :
ALGÈBRE : **Racines carrées : notation $\sqrt{a}$** ($a \geq 0$) ...

Ceux de 1987 (Classe de troisième) :
ALGÈBRE : **Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées)**

Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a.

Savoir déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x, tels que $x^2 = a$, où a désigne un nombre positif. *(On notera que ces nombres ne sont pas qualifiés de «racines carrées», mais que rien n'interdit de le faire).*

Il n'est pas dans mes intentions de vouloir faire passer la lettre des programmes avant des considérations de sens ou même avant des relations relatives aux habitudes de la communauté mathématique proprement dite ou de la communauté des enseignants de mathématiques.

Toutefois, les programmes ne sont pas sans influencer les manuels, qui eux-mêmes influencent la formation des enseignants et des élèves. Les enseignants de 1990 sont les élèves de 1975 et ils ont par exemple massivement appris que : **"Une racine carrée est toujours positive"**

Je redis qu'il faudra de bonnes raisons pour leur faire oublier cela et que l'existence dans **C** de 2 solutions pour l'équation $x^2 = a$ (solutions qu'il est traditionnel d'appeler racines) risque fort de ne pas être une raison suffisante.

Le programme de 1971, et, dans une moindre mesure, celui de 1978, considère donc qu'un nombre positif n'a qu'une racine carrée. Le programme de 1987 est plus vague et permet d'accepter plusieurs interprétations. Il n'est cependant pas suffisamment explicite pour provoquer des modifications de comportement chez les enseignants.

Les manuels :

Ils suivent de près ou de loin les programmes.

Leçons d'algèbre conformes aux programmes officiels de l'enseignement des lycées (Ch.BRIOT - 1874)

On appelle en général racine n$^{\text{ième}}$ d'un nombre positif a, un **nombre positif**, commensurable ou incommensurable qui, élevé à la n$^{\text{ième}}$ puissance, reproduit le nombre proposé.

IREM de STRASBOURG - classe de troisième - 1980

Pour tout nombre positif a, $\sqrt{a}$ est le nombre réel positif tel que $(\sqrt{a}\,)^2 = a$. Le symbole $\sqrt{a}$ se lit "racine carrée de a"

... Utiliser la table pour donner **la racine carrée** des nombres suivants.

Monge - classe de troisième - 1980

On dit que **le** réel positif ou nul x est *la* **racine carrée** du réel positif ou nul a, et l'on note $x = \sqrt{a}$.

Bordas - classe de troisième - 1989

...$\sqrt{a}$ est la racine carrée positive de a.

Les exercices semblent être en accord avec cette façon de présenter la notion (implicitement deux racines carrées pour un nombre positif).

Hachette - classe de troisième - 1989

Ne donne pas de définition précise, mais affiche en gras :

Une racine carrée est toujours positive

puis, plus loin : ce qu'on sait faire, c'est contrôler si un nombre est **la racine carrée** d'un autre...

IREM de STRASBOURG - classe de troisième - 1989

Le nombre $\sqrt{a}$ est appelé «racine carrée de a». On ne dit pas si $-\sqrt{a}$ peut aussi être appelé racine carrée de a, mais plus loin, on parle de : **la** racine carrée d'un produit, **la** racine carrée d'une somme ... et, dans les exercices, on demande «pour quelles valeurs de b est-il vrai que : $(b - 2)^2$ a pour racine carrée $b - 2$?» question classique qui suppose bien évidemment l'unicité de la racine carrée d'un nombre positif.

Mistral - classe de troisième - 1989

... On dit C est la racine carrée de 2 ; on écrit $C = \sqrt{2}$.
Etant donné un nombre positif A, le seul nombre positif dont le carré est A s'appelle **la racine carrée** de A et se note $\sqrt{A}$.

Transmath - classe de troisième - 1989

Dans ce qui suit, a et b désignent deux nombres positifs.
Lorsque $b^2 = a$, on dit que a est le carré de b. Nous dirons aussi maintenant que b est **la racine carrée** de a et nous écrirons $b = \sqrt{a}$.

A propos des manuels scolaires, il faut se méfier des désaccords implicites pouvant exister entre la présentation du cours et la présentation des exercices proposés.

J'ai donc, dans ce qui précède, ébauché une étude qui mériterait d'être approfondie, et je peux seulement conclure que, dans l'état actuel de ma réflexion, je me sens incapable de me décider sinon pour un regain de prudence et pour une relativisation accrue du vocabulaire au bénéfice des concepts et de la recherche de problèmes ayant un sens pour les élèves.