Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire créatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes» ... si possible trouver des solutions et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

Monsieur Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N°193 (Vincent THILL, Migenne)

a, b, c étant dans **N***, résoudre l'équation :

$$(4ab^2 - a\,c^2)^2 + (4b^3 - 3b\,c^2)^2 = c^6.$$

ÉNONCÉ N°194 (FERMAT, 1643)

Existe-t-il cinq triangles rectangles différents, à côtés de longueurs entières, ayant tous la même aire ?

ÉNONCÉ N°195 (Dominique ROUX, Limoges)

Partant d'un triangle ABC, on coustruit le symétrique de chaque sommet par rapport au côté opposé. Comment doit-on choisir ABC pour obtenir ainsi un triangle équilatéral ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 178 (Michel LAFOND, Dijon)

Si $[x]$ désigne la partie entière de x, montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] - [\sqrt{n}]$$ est un entier pair.

SOLUTION de Pierre BARNOUIN (Cabris)

La différence entre $[n/i]$ et $[(n - 1) / i]$ vaut 1 si i divise n et 0 dans le cas contraire. On peut au besoin utiliser cette particularité pour lister les nombres premiers (voir ci-dessous)

Le premier terme de $f(n)$ est donc le cumul des nombres de diviseurs des entiers de 1 à n. Il change de parité si n, carré parfait, qui possède un nombre impair de diviseurs. Mais en ce cas $[\sqrt{n}]$, qui augmente de 1, change aussi de parité. Leur différence $f(n)$ conserve donc toujoure la parité de son premier terme : $f(1) = 1 - [\sqrt{1}] = 0$.

```
FOR N=1 TO 1000: T=S:S=0:FOR I=1 TO N
  S=S+INT(N/I):NEXT:;IF S=T+2 THEN PRINT USING"####";N;
NEXT
   2    3    5    7   11   13   17   19   23   29   31
  37   41   43   47   53   59   61   67   71   73   79
  83   89   97  101  103  107  109  113  127  131  137
 139  149  151  157  163  167  173  179  181  191  193
 197  199  211  223  227  229  233  239  241  251  257
 263  269  271  277  281  283  293  307  311  313  317
 331  337  347  349  353  359  367  373  379  383  389
 397  401  409  419  421  431  433  439  443  449  457
 461  463  467  479  487  491  499  503  509  521  523
 541  547  557  563  569  571  577  587  593  599  601
 607  613  617  619  631  641  643  647  653  659  661
 673  677  683  691  701  709  719  727  733  739  743
 751  757  761  769  773  787  797  809  811  821  823
 827  829  839  853  857  859  863  877  881  883  887
 907  911  919  929  937  941  947  953  967  971  977
 983  991  997
```

Autres solutions

Denis AUROUX (Lyon), Jacques BOUTILLON (Paris), Michel CARRÉ (Nancy), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelle), Philippe DELEHAM (Reims), Jacques FALLIERO (Nay), Michel LAFOND (Dijon), Alain LASJAUNIAS (Bonn), Pierre-Yves LE CLOIREC (Rennes), François LO JACOMO (Paris), Charles NOTARI (Noé), Dominique ROSSIN (Lyon), Marc SACKUR (Metz), Geneviève SAMBARD (Saint Quentin).

Note : Denis AUROUX et Dominique ROSSIN sont élèves de Claude JOMBERT en T.C. au Lycée du Parc à Lyon.

ÉNONCÉ N°179 (Raymond RAYNAUD, Digne)

Que dire d'une application f de **N** dans **N** telle que pour tout n de **N**, $f(n+1) > f \circ f(n)$?

SOLUTION de Jacques BOUTILLON (Paris)

❖ Montrons par récurrence sur k que si $n \geq k$ alors $f(n) \geq k$.

C'est vrai pour $k = 0$ car $f(n) \in \mathbf{N}$.

Supposons que ce soit vrai pour k et soit $m \geq k$. Alors $f(m+1) > f \circ f(m)$ et comme $f(m) \geq k$, on a $f \circ f(m) \geq k$ donc $f(m+1) \geq k+1$, ou encore $f(n) \geq k+1$ dès que $n \geq k+1$.

❖ Nous avons donc $f(n) \geq n$ et $f(n+1) > f \circ f(n) \geq f(n)$, par suite f est strictement croissante.

❖ Supposons qu'il existe n tel que $f(n) > n$, disons $f(n) = a$.

Alors $a \geq n+1$ donc $f(a) \geq f(n+1)$ puisque f est croissante. Mais $f(n+1) > f \circ f(n) = f(a)$. Cette contradiction prouve que pour tout n de **N**, $f(n) = n$.

Conclusion : f est l'identité dans **N**.

Autres solutions :

Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Jean GOUNON (Paris), François JABŒUF (Montpellier), François LO JACOMO (Paris), Pierre-Yves LECLOIREC (Rennes), Bernard MOULIN (Aix en Provence), Charles NOTARI (Noë), Raymond RAYNAUD (Digne), Geneviève SAMBARD (Saint-Quentin), Pascal SCHRECK (Sierentz).

Note : ce problème a été étudié dans les numéros 7, 8 et 9 de la revue *Tangente*.

ÉNONCÉ N° 180 (Georges COLLOMBAT, Chambéry)

Quel est le nombre de façons de placer deux rois sur un échiquier ? (Ils ne sont pas en échec et il n'y a pas d'autres pièces).

SOLUTION de Pierre BARNOUIN (Cabris).

Le premier Roi posé sur l'échiquier laisse à l'autre:
➠ 64 - 9 = 55 cases s'il est dans le carré central de 6x6 = 36 cases.

➠ 64 - 4 = 60 cases s'il occupe l'un des quatre coins,
➠ 64 - 6 = 58 cases s'il occupe l'une des 24 autres cases,
Soit en tout 3612 cases. Si les Rois se montrent plutôt bons princes, la cohabitation des Reines est bien plus scabreuse, et pour un harem de huit d'entre elles, on ne trouve plus que 92 solutions.

Note : Tout en étant d'accord avec ce résultat (cf *Bulletin* n°364, page 391) relatif à un célèbre problème attribué à GAUSS (mais que l'on trouve antérieurement chez BELLAVITIS) et soucieux de ne pas causer de complications dans les chaumières, je laisse l'entière responsabilité de la dernière assertion à son auteur!

Plusieurs lecteurs expriment leur étonnement face à la simplicité de ce problème. Au-delà de ce problème effectivement simple, une généralisation (d'ailleurs fournie par l'auteur de l'énoncé) était espérée. Celle-ci est venue d'un étrange lecteur qui signe sa lettre Lear VADAUR de Bételgeuse *(Constellation d'ORION)*

Mon petit doigt extra-galactique me dit que ce sympathique correspondant pourrait bien être une connaissance intime de Gérard LAVAU (Rouen). PASCAL aussi aimait les anagrammes : Amos DETTONVILLE, Salomon de TULTIE, Louis de MONTALTE ... ne sont-ils pas le même auteur des 19 lettres à un Provincial ?

Voici la lettre de ce lointain mathématicien :

Un voyageur interstellaire m'ayant fait part par hasard de l'énoncé 180 des problèmes de l'A.P.M.E.P. - *Quel est le nombre de façons de placer les deux rois sur un échiquier* - je vous propose la solution suivante.

Il va de soi que j'ai choisi d'utiliser le jeu d'échecs utilisé sur Bételgeuse, à savoir ce que vous appelleriez peut-être un hyper-échiquier de dimensions k , à n cases par côté. Cet échiquier comporte n^k cases, chacune d'elles pouvant être repérée par un k-uplet $(x_1 , x_2 , \dots x_k)$ où les x_i sont des entiers pouvant varier entre 1 et n. Je me suis laissé dire que votre échiquier terrestre correspondait au cas $k = 2$ et $n = 8$. Chaque roi peut se déplacer d'une case dans tous les sens, ce qui correspond à une variation d'un nombre quelconque de coordonnées x_i de $\pm$ 1. Deux rois aux positions respectives $(x_1 , x_2 , \dots x_k)$ et $(y_1 , y_2 , \dots y_k)$ doivent donc vérifier : $\mathrm{Min}\,(|y_i - x_i|) \geq 2$.

Si le roi blanc occupe la position $(x_1 , x_2 , \dots x_k)$, toutes les cases sont possibles pour le roi noir, sauf celles vérifiant, pour tout i, $y_i = x_i$ ou $y_i = x_i - 1$ ou $y_i = x_i + 1$. Les cas extrêmes où $x_i = 1$ ou $x_i = n$ compliquent le calcul.

Considérons un k-uplet $(x_1 , x_2 , \dots x_k)$ comportant p coordonnées extrémales $x_i = 1$ ou n. Le nombre de tels k-uplets est :

$$\mathbf{C}_k^p \cdot 2^p \cdot (n-2)^{k-p}$$

nombre de façons de choisir les p indices i tels que $x_i = 1$ ou n

choix des $k - p$ valeurs non extrémales des x_i de 2 à $n - 1$

nombre de choix des p valeurs extrémales 1 ou n

Pour un tel k-uplet, le nombre de positions possibles pour l'autre roi est $n^k - 2^p\, 3^{k-p}$, à savoir le nombre de cases totales n^k diminué du nombre de cases pour lesquelles :

$$\left.\begin{array}{l} y_i = 1 \text{ ou } 2 \text{ lorsque } x_i = 1 \\ y_i = n \text{ ou } n-1 \text{ lorsque } x_i = n \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{il y a } p \\ \text{tels } y_i \end{array}$$

$$y_i = x_i \text{ ou } x_i - 1 \text{ ou } x_i + 1 \text{ lorsque } 2 \leq x_i \leq n \quad \text{il y a } k-p \text{ tels } y_i$$

ce qui fait $2^p\, 3^{k-p}$ k-uplets $(y_1 , y_2 , \dots y_k)$ à éliminer.

Le nombre total de choix possibles est donc

$$\sum_{p=0}^{k} \mathbf{C}_k^p \cdot 2^p \cdot (n-2)^{k-p} \cdot \left(n^k - 2^p \cdot 3^{k-p}\right)$$

$$= n^k \cdot \sum_{p=0}^{k} \mathbf{C}_k^p \cdot 2^p \cdot (n-2)^{k-p} - \sum_{p=0}^{k} \mathbf{C}_k^p \cdot 4^p \cdot [3(n-2)]^{k-p}$$

$$= n^k \cdot [2 + (n-2)]^k - [4 + 3(n-2)]^k$$

$$= n^{2k} - (3n-2)^k .$$

On a reconnu en effet des développements du binôme de Newton. La réponse est donc : $n^{2k} - (3n-2)^k$.

Pour l'échiquier terrestre, $n = 8$ et $k = 2$, on trouve 3 612 possibilités.

P.S. Je me suis laissé dire que sur Sirius, ils utilisent également un hyper-échiquier de dimension k avec q rois de couleurs différentes. Cependant, étant piètres mathématiciens, je doute qu'ils vous envoient une solution pour leur type de jeu.

Autres solutions :

Classe Sup 4 du Lycée CORNEILLE à Rouen, Georges COLLOMBAT (Chambéry), François CLAUSS (Marckolsheim), Philippe DELEHAM (Reims), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Bernard POIRIER (Hyères), Geneviève SAMBARD (Saint Quentin), et cinq élèves : Séverine CAUCHY, Patrick GUARESI, Vincent RICHARD, Carine LEFAURE, Corrine VEARENNE de terminale A1 du Lycée de Saint Léonard de Noblat. Le professeur Rémy DUBREUIL est un fort joueur d'échecs, ancien champion du Limousin.

Remarque : La classe SUP4 du Lycée CORNEILLE envisage une autre généralisation : celle à un échiquier rectangulaire de n sur p cases. Le décompte direct donne sans difficultés la réponse : $(n\,p)^2 - 9\,n\,p + 6\,n + 6\,p - 4$. Dans le cas d'un échiquier carré $n = p$ et cette expression se factorise en $(n-1)(n-2)(n^2+3n-2)$ ce qui donne bien 3 612 lorsque $n = 8$.

ERRATA (*Bulletin* n°379)

- page 393 : énoncé n°190, au lieu de Claude, lire Claudine.
- page 395 : ligne 7, dans $g(x,y,z)$, remplacer les cosinus par des sinus.
- page 395 : ligne 15, au lieu de circonscrit, lire inscrit.