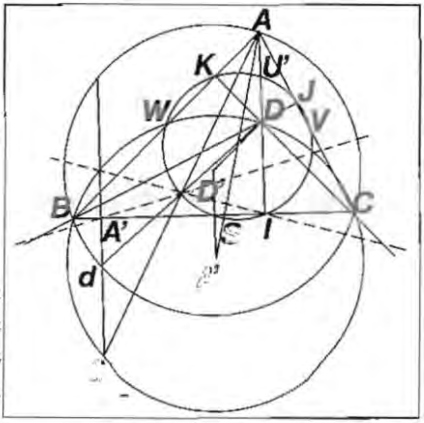
Ces problèmes qui font les mathématiques

Sur le cercle des *n* points

L.Thiberge
Paris

Dans un article relatif au cercle d'Euler, (Bulletin n° 375), J.Kuntzmann met en valeur le fait que ce cercle est attaché non pas à un triangle ABC seul, mais à la figure formée par les quatre points A,B,C,D, dont chacun est l'orthocentre du triangle des trois autres. J'en ai soumis à l'auteur une confirmation, qu'il m'invite à confier au Bulletin.



Cette figure, où A,B,C,D sont distincts, sera appelée ici un quadruplet orthocentrique, noté en abrégé (QO). Son écartés ainsi :
- le mot de quadruplet, qui désignerait quatre points ordonnés ;
- le cas limite où deux des quatre points seraient confondus (triangle rectangle).

Les notations s'accordent avec celles de J.Kuntzmann. (O) est le cercle d'Euler, de rayon r ; S désigne la symétrie de centre O. Le cercle circonscrit (A') au triangle BCD a pour rayon $R = 2r$ et pour centre A' = S(A), etc. (A'B'C'D') = S(ABCD) est aussi un (QO), dont (O) est le cercle d'Euler.

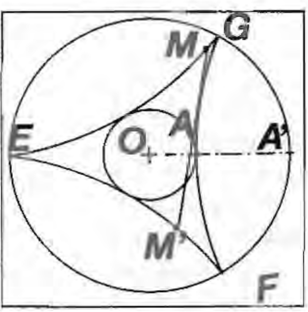
I- Les quatre triangles du (QO) ABCD ont le même ensemble de droites de Simson.

Il suffit de le démontrer pour deux d'entre eux, tels BCD et ABC. Le cercle (A') a pour image le cercle (D') par la translation T de vecteur $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{DA}$

Soit a un point quelconque de (A'), d son image par T, (α) la droite de Simson de a pour le triangle BCD, (δ) celle de d pour le triangle ABC. (α) et (δ) contiennent la projection commune de a et d sur la droite (BC) ; elles contiennent respectivement le milieu de [a A] et de [d D], milieux qui coïncident avec le centre ω du parallélogramme ADad. Donc (α) et (δ) coïncident.

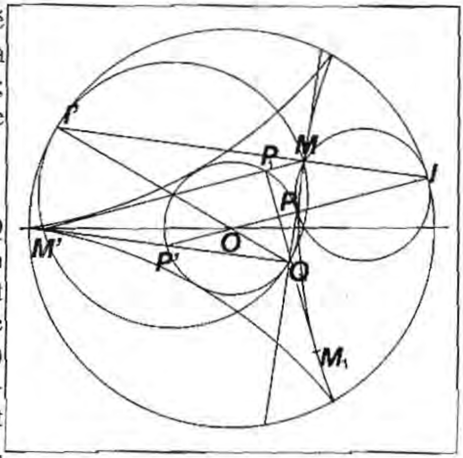
Ainsi, l'ensemble des droites de Simpson est "attaché" au (QO) ABCD, et non pas seulement à l'un de ses triangles, tels que ABC.

Les points a, b, c, d, images de A, B, C, D par la symétrie de centre ω, résultent ensemble du choix de ω sur (O) ; ω est un paramètre "naturel" pour déterminer l'une des droites de Simson ; celle-ci est l'isocline de $(I\omega)$ par rapport à (AD) ou (BC), I étant le point commun à ces deux droites.



II - Il résulte du paragraphe I que l'hypocycloïde à trois rebroussements enveloppe des droites de Simson de chacun des quatre triangles du (QO) peut être dite "attachée" elle-même au (QO) ABCD et nommée hypocycloïde de Steiner de ce (QO), notée (HS). Son cercle tritangent est le cercle d'Euler du (QO).

Les points de contact de cette (HS) et du cercle d'Euler, et de même leurs images par S relatives à l'(HS) du (QO) A'B'C'D', sont-ils six points remarquables du cercle d'Euler, à ajouter à ceux qu'a recensés J.Kuntzmann ? Oui, en un sens ; observons toutefois qu'au contraire des points précités, leur construction ne se fait pas à la règle et au compas, car elle concerne la trisection d'un angle en général quelconque.



III - Rappelons une propriété tangentielle de l'hypocycloïde à trois rebroussements notée (H3) ; la tangente en M coupe le cercle tritangent (O) en P et Q tels que

$$\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MP}$$

nommons-les P majeur et Q mineur. Dans la description cinématique de (H3), P est le point de contact de (O) et du cercle "roulante", P et Q décrivent (O) avec des vitesses algébriques v et $-2v$. (H3) admet une tangente et une seule perpendiculaire à MPQ, soit M'P'Q' ; les mineurs vérifient Q' = Q, les majeurs vérifient P' = S(P).

Adaptons ces propriétés à l'(HS) d'un (QO). Pour la droite de Simson définie au paragraphe 1, ω est le point majeur ; les droites *(BC)* et *(AD)* sont deux droites de Simson rectangulaires, leur point commun I est le mineur de chacune d'elles ; les milieux U de [BC] et U' de [AD] sont les majeurs ; les points de contact de *(BC)* et *(AD)* avec *(HS)* sont les symétriques de I par rapport à U et U'. De même pour les mineurs J et K, pour les majeurs V et V4, W et W' ; [JK] a pour médiatrice le diamètre *(UU')*, etc...

IV - Pour un (QO) inconnu, la donnée presque arbitraire sur son cercle d'Euler :

- des mineurs I, J, K, détermine le (QO), A, B, C, D sont les centres des quatre cercles tangents aux côtés du triangle IJK ;
- des majeurs, extrémités de trois diamètres [UU'], [VV'], [WW]' détermine à S près le triangle IJK, puis le (QO) ;
- d'un mineur I et du diamètre [UU'] des majeurs qui lui sont associés, détermine un ensemble (E) de (QO) dont l'étude suit.

On construit l'un de ces (QO) au moyen d'un cercle de centre U et de rayon ρ, qui coupe la droite *(IU)* en B et C et le cercle d'Euler en J et K, d'où A et D. L'ensemble (E) dépend du paramètre ρ, $0 < \rho < 2r$ (excluant les cas limites).

Tous les (QO) de l'ensemble (E) ont la même (HS). D'après le paragraphe I en effet, le choix de ω sur le cercle d'Euler commun à ces (QO) détermine pour chacun d'eux la même droite de Simson, isocline de *$(I\omega)$* par rapport à *(IU)* ou à *(IU')*.

Dès lors, on peut aisément, *une (H3) étant donnée, déterminer l'ensemble ξ des (QO) dont elle est l' (HS).* Ceux de ces (QO) qui sont construits sur une tangente choisie (mineur I, majeur U) et donc sur la tangente perpendiculaire (mineur I, majeur U'), constituent un ensemble (E_I) ci-dessus reconnn ; ξ est la réunion des (E_I), I décrivant le cercle d'Euler. ξ dépend des deux paramètres I et ρ.

Je m'étonnais jadis qu'un triangle T, aussi boîteur (scalène) fût-il, pût donner lieu à une courbe dotée d'uu centre de répétition ternaire ; je suis moins surpris depuis que je vois en T le "quart" d'un (QO), lui-même élément de l'ensemble ξ -à deux paramètres- attaché à la même (HS).

Etude expérimentale partielle de l'Enveloppe des droites de Simson.