Dans nos classes

Mathématiques à construire

Pierre-Olivier LEGRAND

IREM de Bordeaux
Antenne de Polynésie Française

Le débat sur l'évolution des programmes de mathématiques n'est pas prêt de cesser. La réduction des contenus, rendue nécessaire par le choix incontournable d'une éducation de masse, peut ne pas se traduire par une réduction de l'activité mathématique, au contraire.

J'ai l'impression que l'enseignement que j'ai subi n'a que très rarement laissé la place à une activité mathématique réelle. Dans l'enseignement traditionnel français on apprend, on apprend beaucoup, pour utiliser plus tard les connsaissances acquises.

Même le CAPES et l'Agrégation sont des tests de connaissance, de résistance physique (surtout quand, comme à Tahiti, ils se passent de nuit...), plus que d'aptitude à résoudre des problèmes.

Faut-il attendre le DEA pour faire des mathématiques ? Ce serait absurde.

J'ai la certitude que l'on peut, qu'il faut, le plus tôt possible, proposer des situations d'activité mathématique réelle. Il n'est pas toujours nécessaire d'avoir des connaissances très étendues pour résoudre des problèmes, et la grande variété des concours, olympiades et compétitions de mathématiques dans le monde, à tous les niveaux, le montre bien.

Je voudrais montrer ici une activité qui peut être proposée à tous les niveaux des lycées ou collèges, dans la mesure où les connaissances pures pour l'aborder sont réduites. Partant de rien, ou presque rien, on arrive, en quelques pas à des problèmes ouverts.

L'idée originale m'a été donnée par le professeur Alexander SOIFER (Université d'Etat de Moscou, Université du Colorado à Colorado Spring), des problèmes connexes sont développés par lui dans le numéro de Janvier 1990 de la revue Américano-Soviétique "QUANTUM".

PROBLEME :(*)
Un plan est peint de façon aléatoire en deux couleurs, Vert et Jaune. On peut supposer que l'on projette au hasard ces deux couleurs sur une surface plane et très grande.
Prouver qu'il existe toujours deux points, distants de 10 cm, et qui sont de la même couleur.

(*)On trouveau Rallye mathématique d'Alsace 1987 (classe de première), un sujet du même style : "Quick et Pluck barbouillent avec trois couleurs le sol de la cuisine : du blanc, du rouge et du vert. Quick sort alors un compas de sa poche. Il l'ouvre au hasard et parie à Pluck qu'il pourra poser son compas sur le sol de sorte que les deux pointes soient exactement sur la même couleur. En fait Quick est sûr de gagner son pari, quelle que soit l'ouverture de son compas. Pourquoi ?"

Là, il serait sage d'arrêter la lecture, et de *chercher* à résoudre ce problème.

Détaillons alors ce qu'est une démarche mathématique, qui, tout compte fait, et contrairement à l'image que l'on souhaite donner parfois, est très naturelle.

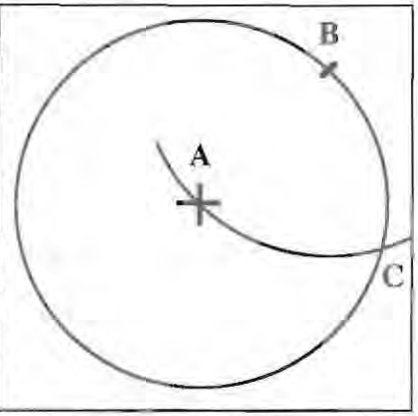
✲ Si le plan est tout jaune, c'est facile. On peut même prouver un peu plus: pour tout réel positif d, il existe deux points jaunes séparés de d cm.

✲ Si le plan contient des points **V** et **J**, c'est presque aussi facile. Choisissons un point A, jaune, et traçons un cercle de centre A et de rayon 10 cm.

Si sur le cercle, il y a un point B jaune, alors le couple (A,B) répond à la question.

Sinon, tous les points du cercle sont verts.

Soit alors un points B de ce cercle, qui est donc vert et traçons un deuxième cercle de centre B et de 10 cm de rayon. Il coupe le premier cercle en C, donc C est vert, et le couple (B,C) répond à la question.
Dans tous les cas, nous avons pu trouver un couple **V-V** ou **J-J**.



L'analyse précédente est simple et naturelle ; c'est ainsi que toutes les personnes (élèves, collègues, touristes,...) à qui je l'ai proposé ont résolu ce problème.

Oui, mais si l'on regarde un peu la figure, on constate que les cercles n'interviennent quasiment pas dans la preuve, et que l'essentiel réside dans le triplet A,B,C), et alors on se trouve devant une preuve qui séduit par son élégance et sa simplicité.

Considérons un triangle équilatéral ABC. Les points A, B et C sont **V** ou **J**. Donc, deux d'entre eux au moins sont de la même couleur!

Voilà une autre étape de l'activité mathématique, la simplification des preuves qui constitue ici ce que Guy BROUSSEAU appelle "la transposition didactique".

La deuxième preuve est claire, plus simple et plus courte que la première. Mais il serait malhonnête de la proposer à quiconque n'aurait pas cherché un tant soit peu le problème, car elle ne paraît plus alors simple et élégante, mais trop astucieuse pour être trouvée.

En ne détaillant pas l'heuristique des preuves, on passe certes pour très malin, mais on risque de convaincre l'auditoire que les mathématiques font partie d'un domaine réservé.

Continuons l'analyse de notre solution. La preuve repose sur la propriété du triangle équilatéral d'avoir ses trois côtés égaux, mais alors on a prouvé, comme dans le cas trivial, un résultat beaucoup plus fort! *"Quelle que soit la distance choisie, on peut trouver un couple de points de même couleur à cette distance"*.

C'est une illustration d'un problème scientifique bien connu : quand on cherche à résoudre un problème, on trouve souvent en route des résultats bien intéressants...

Il y a dans la preuve autre chose de si naturel qu'il peut passer inaperçu. C'est, à l'usage, le morceau le plus savoureux de ce problème.

Trois points, deux couleurs. Deux points au moins sont de la même couleur. Un enfant de huit ans comprend cela. Si trois pigeaons doivent s'abriter dans deux nids, un nid contiendra au moins deux pigeons.

Ce principe élémentaire connu (vraiment ?...) en France sous le nom de *"Principe de Dirichlet"* est connu ailleurs sous le nom anglais de *"pigeonhole principle"*.

Mais alors, notre problème de départ, dont nous avons une solution élégante et plus générale, nous fournit également un outil de raisonnement simple et efficace grâce auquel, dans l'avenir, on pourra simplifier les démarches heuristiques!

De partont alors fusent les idées, car enfin, c'est le propre de l'activité scientifique, toute "découverte", n'ayons pas peur des mots, et au diable la modestie, pose souvent plus de questions qu'elle n'en résout.

- 1) Dans les conditions précédentes, peut-on être sûr qu'il existe deux points de couleurs différentes .
- 2) Dans l'espace, peut-on aussi trouver deux points de même couleur -de couleurs différentes- à une distance donnée ? Et dans un espace à n dimensions ?
- 3) Dans le plan, peut-on trouver des ensembles plus complexes, triangles, polygones, coniques etc... formés de la même couleur, encore une fois quelle que soit la façon de peindre le plan ?

Ces questions se posent "naturellement" et, ce faisant, on "fait" des mathématiques, avec, comme connaissances requises, la notion élémentaire de distance euclidienne du plan, les définitions du cercle et du triangle équilatéral, et la propriété du compas de conserver les distances, et dans notre cursus, ces notions arrivent très tôt.

➪ 1) Regardons un peu le premier problème.

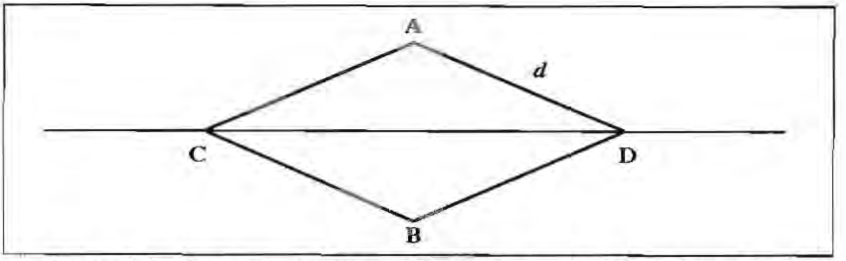
> Dans les conditions précédentes, peut-on être sûr qu'il existe deux points de couleurs différentes ?

(Là encore, le lecteur doit fermer le Bulletin et chercher par lui-même...)

Si le plan est monochrome, la réponse est négative.

Sinon, il existe deux points A et B de couleurs différentes. S'ils sont à la distance d, c'est fini, sinon, leur distance est inférieure ou supérieure à d.

Si elle est inférieure, on trace la médiatrive de $[AB]$, et on considère les points C et D de la figure. $ABCD$ est un losange de côté d.



Il est clair alors que *(A,C)* ou *(B,C)*, *(A,D)*, ou *(BD)* répondent à la question.

Si la distance est supérieure à d, on trace le segment $[AB]$.

A partir de A, on place sur $[AB]$ des points d-équidistants. Le premier qui n'a pas la couleur de A nous donne nne solution.

S'ils ont tous la conleur de A, il existe A' à une distance inférieure ou égale à d de B, et on utilise le résultat précédent.

On a donc le résultat suivant :

Si un plan contient au moins deux points de couleurs différentes, on peut toujours trouver deux points de couleurs différentes à une distance donnée à l'avance.

➪ 2) Passons au second problème.

> Dans l'espace, peut-on aussi trouver deux points de même couleur - de couleurs différentes- à une distance donnée ? Et dans un espace à n dimensions ?

Si l'on n'a pas réfléchi au premier problème, celui-ci, bien que ne supposant que très peu de connaissances mathématiques, est assez difficile, mais on a réfléchi et on dispose même d'un outil qui *mutatis mutandis* pourrait resservir.

La transposition du premier problème nous amène à énoncer un résultat qui devient trivial : *Si les points de l'espace sont de trois couleurs possibles, quelle que soit la distance donnée, on peut en trouver deux de même couleur.*

Preuve : Considérer un tétraèdre régulier d'arête d. Il a quatre sommets qui sont de trois couleurs possibles, principe de Dirichlet, deux d'entre eux au moins sont de la même couleur, et c'est fini.

On n'a fait qu'effleurer le problème initial. Qu'advient-il si l'espace a plus de trois couleurs ? S'il en a moins ? Peut-on prouver qu'il existe toujours des points de couleurs différentes ?...

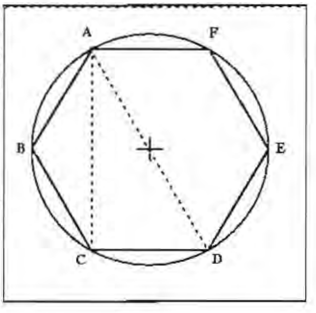
➪ 3) Détaillons un peu plus la troisième série de problèmes.

a) Prouver qu'il est toujours possible de trouver, dans le plan bicolore, un triangle rectangle ayant un angle mesurant $\pi/3$, d'hypoténuse d, dont les trois sommets ont la même couleur.
b) Pourver qu'il est possible, dans ce plan, de trouver un triangle d'angles $\pi/7$, $4\pi/7$ et $2\pi/7$ ayant la même propriété
c) Trouver un type de coloration pour lequel il n'est pas possible de trouver un triangle équilatéral de côté 10 cm ayant ses sommets de même couleur.

Ces trois problèmes originaux ont été posés et résolus par A.Soifer cette année (1990). Les poser, les chercher, les résoudre, c'est bien faire de vraies mathématiques, sans ordinateurs, sans beaucoup de connaissances raffinées en algèbre ou analyse.

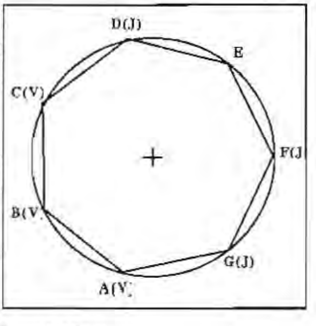
Les preuves sont si belles par leur simplicité et leur légèreté que je ne résiste pas au plaisir de les donner, alors qu'en toute logique, il serait préférable de laisser le plaisir de leur découverte au lecteur.

3a) On considère un hexagone régulier *ABCDEF*. On a vu qu'il est toujours possible de trouver deux points *A* et *D* de la même couleur à une distance donnée *d*.



Supposons donc *A* et *D* verts.
Pour que le problème n'ait pas de solution, il faudrait que *D*, *C*, *F* et *E* ne puissent être verts. S'ils sont jaunes, le problème est résolu!

3b) On considère un heptagone régulier *ABCDEFG*. Il est toujours possible de le construire tel que [*AB*] ait une longueur donnée et *A* et *B* verts.



Supposons que le problème n'ait pas de solution.*D* et *F*doivent être jaunes, sinon *ABD* ou *ABF* seraient solutions.
Mais alors *C* doit être vert, car sinon, *CDF* serait solution.

Mais alors *G* doit être jaune, car sinon, *GAC* serait solution.

Reste à trouver la couleur de E.

Si E est vert, alors BCE est solution, et s'il est jaune, alors DEG est solution.

Il y a contradiction, donc, dans tous les cas, la construction posée est possible.

3c) Il n'est pas possible de construire un triangle équilatéral de côté d. , les trois sommets étant de la même couleur, avec un coloriage par bandes de largeur $d/2$.

On vient de voir que la réponse a été apportée pour un certain nombre de configurations. Aujourd'hui, ***c'est un problème ouvert*** que de savoir pour quels types de figures il est ou non possible de trouver dans tous les cas de coloriage du plan, un représentant ayant tous ses sommets isochromes.

Partant d'une activité simple, que l'on peut laisser se développer dans une classe de collège, on arrive très vite, sans vocabulaire ou concepts particuliers, à des problèmes ouverts.

A bien y regarder, la trisection de l'angle ou la mesure de la longueur de la côte de Bretagne sont des problèmes qui, dans leur approche préliminaire, sont très simples. Leur richesse est connue.

Je n'ai pas l'intention, dans cet article, de jouer les stakanovistes auprès de mes collègues. Je suis bien conscient, pour les vivre moi-même, des réalités de la vie quotidienne dans la classe de mathématiques. Je voudrais simplement attirer l'attention sur le fait que le temps dégagé par les allègements de programmes peut être utilisé à des activités mathématiques réelles, ce qui, dans bien des cas, est plus rentable que de l'investir dans des exercices de routine supplémentaires (qui ont certes leur intérêt dans l'apprentissage).

Je serais reconnaissant à toute personne se penchant sur les problèmes proposés, trouvant des solutions aux problèmes ouverts, ou des améliorations aux solutions proposées, de me les adresser: **Pierre-Olivier Legrand**
Antenne de Polynésie de l'IREM de Bordeaux. B.P.5518, Pirae, TAHITI

Pour en savoir plus:

- "*QUANTUM*" est une revue inspirée de la revue russe "QVANT"
Pour tout renseignement : National Science Teacher Association, 1742 Connecticut Avenue NW. Washington, DC, 20009 -
Quantum Bureau of the USSR Academy of Sciences-32/1 Gorky Street. MOSCOU 103006 URSS.
- Alexander SOIFER : *"How does cut a triangle ?"* , *"Mathematics as problem solving"* (Center for Excellence in Mathematical Education).