Calculs sur les pourcentages
Variations d'une grandeur

Jean Pierre Forges

77 100 MEAUX

I - POURCENTAGES SIMPLES.

1- Définition et notation.

Exemple : $3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$; $30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3$; $123\% = 1{,}23$.

En général : $t\ \% = \frac{t}{100}$.

2- Calculer t % d'une grandeur.

Exemple : 39% de 750 kg, c'est $\frac{750 \times 39}{100} = 292{,}50$ kg

et on remarque que cela s'écrit aussi $750 \times 0{,}39$.

En général : $t\ \%\ x = \frac{t\ x}{100}$.

Remarque : on a le cas d'une multiplication d'une fraction par un nombre :

$$t\ \%\ x = \frac{t}{100} \times x = \frac{t\ x}{100}.$$

3- Pourcentage simple et proportionnalité.

On appelle (x) le nombre auquel on applique le pourcentage,
(t) le taux de pourcentage,
(y) le résultat de l'application du taux (t) à (x).

On a alors en général : $\boxed{y = \frac{t\ x}{100}}$

Ce qui peut s'écrire aussi : $\frac{y}{x} = \frac{t}{100}$ (Vérifier le «produit en croix»)

D'où le tableau de proportionnalité :

A	x	100
B	y	t

(1)

4- Les trois cas de problèmes sur les pourcentages simples.

Dans $y = \frac{t\ x}{100}$ on a trois valeurs x, y et t, dont deux sont connues sur les trois. On peut aussi écrire : $100\ y = t\ x$. (2)

➠ On connaît (t) et (x), calculer (y) : $y = \frac{t\ x}{100}$

➠ On connaît (t) et (y), calculer (x) : $x = \frac{100\ y}{t}$

➠ On connaît (x) et (y), calculer (t) : $t = \frac{100\ y}{x}$.

Ces valeurs peuvent se déduire du tableau de proportionnalité (1) ou de l'égalité (2), au choix.

EXEMPLES :

➠ Calculer 18,6% de 500 F. Ici $t = 18{,}6$; $x = 500$ et on a

$$y = \frac{18{,}6 \times 500}{100} = 18{,}6 \times 5 = 93 \text{ F}.$$

➠ Une prime de 1 628 F représente 22% d'un salaire. Calculer ce salaire. Ici, $t = 22\%$; $y = 1\ 628$ et on, a le tableau

Salaire	x	100
Prime	1 628	22

d'où $22\ x = 100 \times 1\ 628$

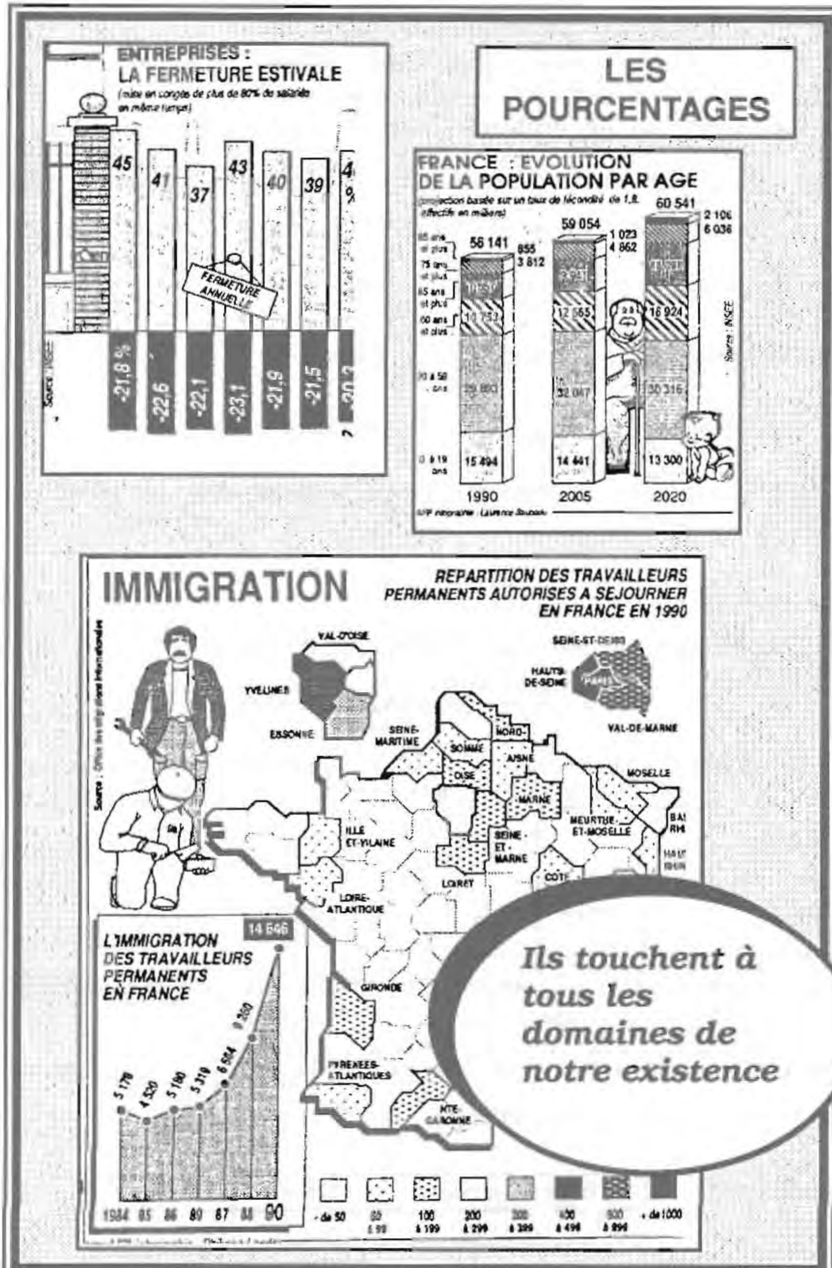
$$x = \frac{162\ 800}{22} = 7\ 400 \text{ F}$$

➠ Lors d'une élection, un candidat obtient 16 101 voix sur 90 000 suffrages exprimés. Quel pourcentage des suffrages exprimés obtient-il ?

On a ici : $x = 90\ 000$; $y = 16\ 101$ d'où $t = \frac{100 \times 16\ 101}{90\ 000}$ ce qui donne $t = 17{,}89$. Donc 17,89% des suffrages.

Tableau

Suffrages exprimés	90 000	100
Nombre de voix	16 101	t


ENTREPRISES :
LA FERMETURE ESTIVALE
45
41
37
43
40
39
FERMETURE ANNUELLE
-21,8 %
-22,6
-22,1
-23,1
-21,9
-21,5
LES POURCENTAGES
FRANCE : EVOLUTION DE LA POPULATION PAR AGE
56 141
59 054
60 541
1990
2005
2020
15 494
14 441
13 300
IMMIGRATION
REPARTITION DES TRAVAILLEURS PERMANENTS AUTORISES A SEJOURNER EN FRANCE EN 1990
VAL-D'OISE
YVELINES
ESSONNE
HAUTS-DE-SEINE
VAL-DE-MARNE
SEINE-MARITIME
SOMME
NORD
AISNE
OISE
MARNE
MOSELLE
MEURTHE-ET-MOSELLE
ILLE-ET-VILAINE
SEINE-ET-MARNE
LOIRET
LOIRE-ATLANTIQUE
GIRONDE
PYRENEES-ATLANTIQUES
HTE-GARONNE
L'IMMIGRATION DES TRAVAILLEURS PERMANENTS EN FRANCE
14 646
1984
85
86
89
87
88
90
Ils touchent à tous les domaines de notre existence

d'où : 90 000 t = 1 610 100 et $t = \dfrac{1\,610\,100}{90\,000} = 17{,}89$

5- Pourcentages remarquables :

$50\% = \dfrac{1}{2}x$; $75\%x = \dfrac{3}{4}x$; $25\%x = \dfrac{1}{4}x$; $20\%x = \dfrac{1}{5}x$

$33{,}33\ldots\%x = \dfrac{1}{3}x$; $10\%\,x = \dfrac{1}{10}x$; $100\%x = x$

$200\%x = 2\,x$; $0{,}1\%\,x = \dfrac{1}{1\,000}x$.

Remarque importante : **0,1%** se note **1‰** et se dit «un pour mille de x ».

Exemple : Taux de natalité de 37‰ = 3,7%

En général : $t‰\,x = \dfrac{t\ x}{1\,000} = \dfrac{1}{10}\dfrac{t\ x}{100} = \dfrac{1}{10}t\%\ x.$

6- Pourcentage de pourcentages ; fractions et pourcentages.

➠ *Exemple 1 :* Calculer 20% de 42% de 700 F.

On écrit : $700 \times \dfrac{20}{100} \times \dfrac{42}{100} = \dfrac{588\,000}{10\,000} = 58{,}80$ F.

En général : $t1\%$ de $t2\%$ de $x = \dfrac{t_1 t_2 x}{10\,000} = \dfrac{t_1}{100} \times \dfrac{t_2}{100} \times x$

➠ *Exemple 1 :* Calculer 28% des $\dfrac{2}{3}$ de 6 000 F.

On écrit : $6\,000 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{28}{100} = \dfrac{336\,000}{300} = 1\,120$ F.

En général : $t\%$ de $\dfrac{a}{b}$ de $x = \dfrac{t}{100} \times \dfrac{a}{b} \times x = \dfrac{t\ a\ x}{100b}$

II - AJOUTER OU RETRANCHER UN POURCENTAGE D'UNE GRANDEUR

1- Ajouter un pourcentage.

- Cas d'une grandeur qui augmente :

❖ Supposons qu'une *grandeur VARIE dans le TEMPS*, par exemple, une température, la valeur d'une monnaie ou d'une action, une production…

Elle passe alors d'une valeur de départ x à une valeur d'arrivée y. Elle varie donc de : Nouvelle valeur - Ancienne valeur

soit : y - x

Cette variation est parfois notée Δx . Ainsi $\Delta x = y - x$.

❖ Supposons qu'elle varie de $t\%$ de sa valeur de départ. Comme on a ici une augmentation, on a ainsi :

$$y = x + t\%\, x = x + \frac{t}{100} x = (1 + \frac{t}{100})\, x.$$

Remarque : on a donc exprimé ici Δx commpe pourcentage de x.
$y = x + \Delta x = x + t\%\, x$. On a bien $\Delta x = t\%\, x$.

Exemple : Une ville de 60 000 habitants voit sa population s'accroître de 13%. Quelle la population nouvelle de cette ville ?

On a ici : $x = 60\,000$; $t = 13$; d'où :

$$y = (1 + \frac{13}{100}) \times 60\,000 = 1{,}13 \times 60\,000 = 67\,800 \text{ habitants.}$$

❖ Supposons qu'une grandeur *varie dans l'espace* , par exemple, la dilatation d'une tige d'acier, l'augmentation de la dimension d'un terrain..., le raisonnement est exactement le même.

on a toujours : $y = (1 + \frac{t}{100})\, x.$

Plus généralement, lorsqu'une grandeur augmente, passant de la valeur initiale (x) à la valeur finale (y), on a :

$\boxed{y = (1 + \frac{t}{100})\, x}$ pour une augmentation de $t\%$ de x.

- *Ajout une quantité nouvelle à une grandeur.*

Exemple 1 : Le prix hors taxe (PHT) d'un article est de 450 F. Le vendeur de cet article ajoute une TVA de 18,6% de ce PHT. Quel est le prix de l'article taxe comprise (PTC) ?

On a : PTC = PHT + taxe = PHT + 18,6% PHT

et $\text{PTC} = (1 + \frac{18{,}6}{100})\text{PHT} = 1{,}186 \text{ PHT} = 1{,}186 \times 450 = 533{,}70 \text{ F}$

Exemple 2 : Le prix d'achat (PA) d'une marchandise est de 1 200 F. L'acheteur dépense 3% de ce montant en frais d'achat. Quel est le montant du coût global de l'achat (CA) ?

On a : $\text{CA} = \text{PA} + 3\%\ \text{PA} = (1 + \frac{3}{100})\ \text{PA} = 1{,}03\ \text{PA}$
$= 1{,}03 \times 1\,200 = 1\,236 \text{ F}$

Généralisation : *Ajouter t% d'une grandeur (x) à cette même grandeur (x) revient à la multiplier par* $(1 + \frac{t}{100})$.

La nouvelle grandeur *(y)* obtenue a donc pour valeur :

$$y = (1 + \frac{t}{100})\,x \quad \text{ou } y = (\frac{100 + t}{100})\,x.$$

Exemple 3 : Un salaire augmente de 4%. Par combien est-il multiplié ?

Réponse : il est multiplié par $1 + \frac{4}{100}$ soit 1,04.

- *Coefficient multiplicateur (C.M.).*

Le nombre $1 + \frac{t}{100}$ par lequel on multiplie *(x)* pour obtenir *(y)* s'appelle **coefficient multiplicateur.**

Exemple : En 10 ans, les prix augmentent de 350%. Par combien sont-ils multipliés ?

Réponse : Les prix sont multipliés par $1 + \frac{350}{100} = 1 + 3,5 = 4,5$

(et non pas 3,5).

Si $\boxed{k = 1 + \frac{t}{100}}$, on en déduit : $k = \frac{100 + t}{100}$ et $100k = 100 + t$.

D'où, $t = 100k - 100$ et $\boxed{t = 100\,(k - 1)}$ ce qui donne le taux d'augmentation connaissant le coefficient multiplicateur.

- *Coefficients multiplicateurs cumulés.*

Exemples : Une scierie vend du bois qu'elle produit en calculant une taxe forestière de 5,90%. Au prix taxé ainsi obtenu, s'ajoute une T.V.A. de 18,60% de ce prix déjà taxé. Quel est le coefficient multiplicateur global permettant de calculer le prix du bois, taxes comprises ?

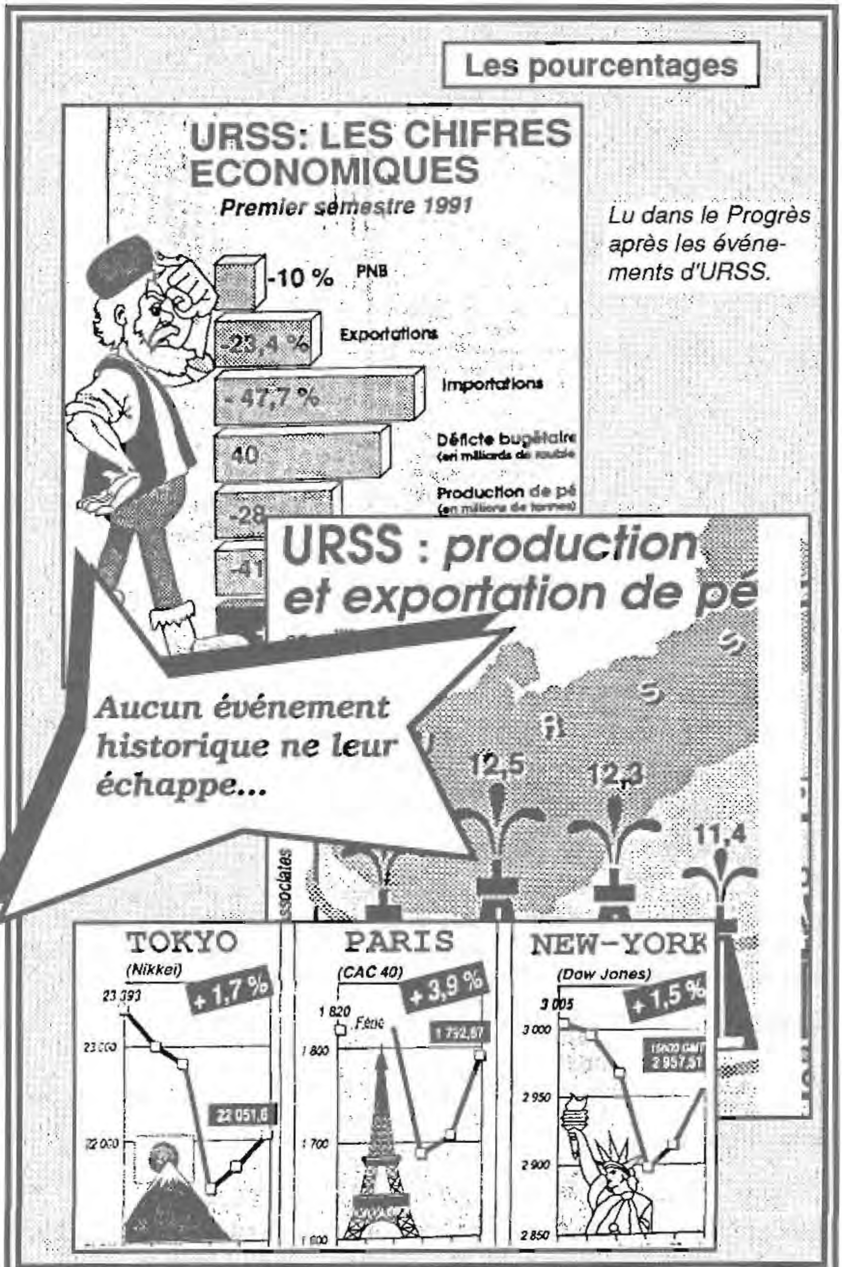
Réponse : Soit *(x)* le prix Hors Taxes du bois ; le premier prix taxé (y_1) est :

$$y_1 = (1 + \frac{5,9}{100})\,x = 1,059x.$$

Le deuxième prix taxé est alors $y = (1 + \frac{18,6}{100})\,y_1$ et $y = 1,186\,y_1$

d'où $y = 1,186 \times 1,059x$. Ainsi : $y = 1,255\,974\,x$.

Le coefficient cherché est donc : 1,255 974 qui correspondrait en fait à une seule taxe de 25,597 4% ≈ 25,6%.


Les pourcentages
URSS: LES CHIFRES ECONOMIQUES
Premier semestre 1991
-10 % PNB
-23,4 % Exportations
- 47,7 % Importations
40 Déficte bugétaire (en milliards de rouble
-28 Production de pé (en millions de tonnes)
-41
URSS : production et exportation de pé
12,5
12,3
11,4
Lu dans le Progrès après les événements d'URSS.
Aucun événement historique ne leur échappe...
TOKYO (Nikkei) + 1,7 %
23 393
23 000
22 000
22 051,6
PARIS (CAC 40) + 3,9 %
1 820
Fête
1 800
1 700
1 600
1 752,67
NEW-YORK (Dow Jones) + 1,5 %
3 005
3 000
2 950
2 900
2 850
2 957,51

Plus généralement, supposons que l'on ajoute à une grandeur *(x)*, t_1% de celle-ci, puis encore t_2% du résultat obtenu, on obtient une nouvelle valeur majorée : $\boxed{y = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right)\left(1 + \frac{t_2}{100}\right) x}$ (3)

Exemple : Un téléviseur de 4 500 F augmente de 3% de 1980 à 1981, puis de 8% de 1981 à 1982.
Le pourcentage total d'augmentation est-il 3% + 8% = 11% ?

Réponse : NON!

➡ Prix fin 1980 : (1 + 0,03) x 4 500 = 1,03 x 4 500 = 4 635 F
➡ Prix fin 1981 : 1,08 x 4 635 = 5 005,80 F

Si l'on avait eu une augmentation de 11% en 2 ans, on aurait fin 1981 :
(1 + 0,11) x 4 500 = 1,11 x 4 500 = 4 995 F , ce qui n'est pas le cas.

En réalité, en 2 ans, le téléviseur a augmenté de 11,24%. En effet, d'après (3) : $y = 1{,}03 \times 1{,}08 \times 4\,500 = 1{,}112\,4 \times 4\,500$.

Comme $k = 1{,}112\,4$; $t = 100 \times (1{,}112\,4 - 1) = 100 \times 0{,}112\,4 = 11{,}24$.

2 - Retrancher un pourcentage.

- Cas d'une grandeur qui diminue.

Exemple 1 : Une personne pèse 80 kg. Elle perd 15% de son poids. Quel est son nouveau poids ?

Réponse : 80 - 15% de 80 : (1 - 15%) x 80 = 0,85 x 80 = 68 kg.

Exemple 2 : Un magasin baisse le prix de tous ses articles de 8%. Par combien doit-on multiplier l'ancien prix pour obtenir le nouveau prix de chaque article ?

Réponse : Soit *(x)* le prix d'un article quelconque. Le nouveau prix *(y)* est :

$$y = x - 8\% = (1 - 8\%)\,x = (1 - \frac{8}{100})\,x$$
$$y = 0{,}92x. \text{ On a donc ici } k = 0{,}92.$$

Généralisation : Soit une grandeur qui diminue, passant de la valeur initiale *(x)* à la valeur finale *(y)*, on a :

$\boxed{y = (1 - \frac{t}{100})x}$ pour une diminution de t% de *(x)*..

Remarque : on a toujours : $y = x + \Delta x$, avec ici , $y = x - \frac{t\,x}{100}$; donc

$$\Delta x = -\frac{t\,x}{100} = -\,t\%x.$$

Dans le cas d'une diminution, $\Delta x < 0$, ce qui est normal car ici $y < x$; ; alors que dans le cas d'une augmentation $\Delta x > 0$, ce qui est normal car $y > x$.

- *Coefficient multiplicateur (C.M.)*

Dans le cas d'une diminution : $k = 1 - \frac{t}{100}$, ce qui donne $100k = 100 - t$ et $t = 100 - 10k$ d'où, $\boxed{t = 100\ (1 - k\ )}$, ce qui donne le taux de diminution connaissant le coefficient multiplicateur k.

Remarque : si $k > 1$ on a une augmentation
si $k = 1$ pas de variation
si $k < 1$ on a une diminution.

- *Retrait d'une quantité à une grandeur.*

Exemple 1 : Un objet de 230 F est vendu avec une réduction de 14%. Quel est le prix soldé ?

Réponse : 230 - 14% de 230 = $(1 - \frac{-14}{100}) \times 230 = 0{,}86 \times 230 = 197{,}80$ F.

Exemple 2 : Un salaire brut de 8 000 F est diminué de 11% en raison des cotisations sociales diverses du salarié. Quel est le montant du salaire net perçu ?

Réponse : 8 000 - 11% de 8000 = (1 - 0,11) x 8 000 = 7 120 F.

Généralisation : *Retrancher 11% d'une grandeur (x) à cette même grandeur (x) revient à la multiplier par* $(1 - \frac{t}{100})$. La nouvelle grandeur *(y)* s'écrit donc :

$$\boxed{y = (1 - \frac{t}{100})x} = (\frac{100 - t}{100})x.$$

Exemple : Un commerçant réalise sur ses ventes une certaine marge brute (bénéfice brut) *(x)*. Mais il doit retirer de celle-ci ses frais de vente qui s'élèvent à 13% de celle-ci. Quel est le bénéfice net ?

Réponse : x - 13% $x = (1 - 0{,}13)x = 0{,}87\ x$.

- *Coefficients multiplicateurs cumulés.*

Exemple : Un grossiste accorde à un client deux remises successives de 3% puis de 7% sur un achat de 25 000 F de son client. Quel est le prix d'achat net de son client ?

Réponse : 25 000 - 3% de 25 000 = (1 - 0,03) x 25 000
= 0,97 x 25 000 = 24 250 F
puis (1 - 0,07) x 24 250 = 0,93 x 24 250 = 22 552,50 F

On remarque que 0,97 x 0,93 x 25 000 = 0,9021 x 25 000 = 22 552,50 F.

Plus généralement, supposons que l'on retranche à une grandeur *(x)*, t_1% de celle-ci, puis t_2% du résultat obtenu, on obtient pour nouvelle valeur

$$\boxed{y = \left(1 - \frac{t_1}{100}\right)\left(1 - \frac{t_2}{100}\right)x}$$

3 - Ajouter et retrancher un poucentage d'une grandeur. Synthèse.

❖ Soit une grandeur qui varie de t% de sa valeur *initiale (x)* pour devenir sa valeur *finale (y)*.

On a : $\boxed{\Delta x = y - x}$ et $\boxed{y = (1 + \frac{T}{100})x}$

avec $\begin{cases} \Delta x > 0 \text{ et } T > 0 \text{ si la grandeur } \textit{augmente} \\ \Delta x < 0 \text{ et } T < 0 \text{ si la grandeur } \textit{diminue} \end{cases}$

Ainsi, si $T > 0$, on a $T = t$ avec $t > 0$ et $y = (1 + \frac{t}{100})\, x$

si $T < 0$, on a $T = -t$ avec $t > 0$ et $y = (1 - \frac{t}{100})\, x$.

❖ Soit une grandeur à laquelle on adjoint une quantité exprimée en pourcentages de celle-ci. On a $y = (1 + \frac{T}{100})\, x$, *(y)* étant la nouvelle valeur obtenue.

Si $T > 0$, on a un ajout (exemple : Taxes,...)
Si $T < 0$, on a un retrait (exemple : remises,...).

❖ Dans tous les cas, *le coefficient multiplicateur* est : $\boxed{k = 1 + \frac{T}{100}}$ et

$k > 1$ si on a une augmentation ou un ajout : $k = 1 + \frac{t}{100}$

$k < 1$ si on a une diminution ou un retrait : $k = 1 - \frac{t}{100}$

III - CALCULER LES VARIATIONS D'UNE GRANDEUR OU L'ÉCART ENTRE DEUX GRANDEURS EN POURCENTAGE.

1 - Variations.

Exemple 1 : Une ville a sa population qui passe de 20 000 à 24 000habitants. Quelle est l'augmentation de la population en % ?

Les Pourcentages

«Il n'y a que quatre ou cinq pilotes capables de conduire les 500 actuelles à 100%»

Parfois, ils ne veulent rien dire

Calderon a transformé contre Marseille son septième penalty de la saison. Est-il à ce jour le meilleur réalisateur du Championnat ?

Oui, même si au pourcentage de réussite, Robby Langers (100%, 5 sur 5) devance l'Argentin qui a déjà échoué dans la transformation de deux penalties cette saison face à Nice (1re journée) et contre le RP1 (27e journée).

Derrière Calderon en tête avec sept réalisations (Nice, RP1 (3), Bordeaux, Brest, Marseille) on trouve successivement Scifo (85,71%) avec six penalties transformés pour Langers (5 penalties, 100%), Papin (4 pénalties, 67%), Diaz (4 penalties, 100%), Blanc (4 penalties, 80%), Marcico (4 penalties, 80%), Mangual (3 penalties, 75%), Périlleux (3 penalties, 75%), Sliskovic (3 penalties, 75%), Vercauten (3 penalties, 100%), Fernier (3 penalties, 75%), Hadzibegic (3 penalties, 75%), Bursac (3

Ils sont parfois sympathiques, mais trompeurs

SOLDES

SUR 50 %

DU MAGASIN

Signalés par des étiquettes spéciales

MEUBLES-SALONS-CUISINES

Réponse : $100 \times (\frac{24\,000 - 20\,000}{20\,000}) = \frac{100 \times 4\,000}{20\,000} = 20$.

L'augmentation est de 20%.

Exemple 2 : Un candidat à une élection voit ses voix ainsi diminuer : 4 000 au premier scrutin, 1 500 au second scrutin. Quelle diminution, en % cela représente-t-il ?

Réponse : $100 \times (\frac{1\,500 - 4\,000}{4\,000}) = \frac{-100 \times 2\,500}{4\,000} = -62{,}5\%$

Conclusion : il doit changer de voie !!!

Généralisation : *Si une grandeur varie de sa valeur initiale (x) à sa valeur finale (y), son taux de variation T en % est donné par*

$$\boxed{T = 100 \times \frac{y - x}{x} = 100\,\frac{\Delta x}{x}}$$

(égalité équivalente à celle rencontrée au paragraphe précédent $y = (1 + \frac{T}{100})x$.)

Remarque : Si $T > 0$ → augmentation
Si $T = 0$ → pas de variation
Si $T > 0$ → diminution.

2 - Ecarts

Exemple : Le salaire moyen des femmes dans une usine est de 5 000 F. Le salaire moyen des hommes dans cette usine est de 6 000 F.

Calculer l'écart en % de ces deux salaires moyens.

Réponse : Il y a 2 méthodes. On prend le salaire des femmes *(F)* comme référence ou bien on prend le salaire des hommes *(H)*.

1er cas : $T = 100 \times (\frac{H - F}{F}) = 100 \times (\frac{6\,000 - 5\,000}{5\,000}) = 20\%$

2ème cas : $T = 100 \times (\frac{F - H}{H}) = 100 \times (\frac{5\,000 - 6\,000}{6\,000}) = -16{,}67\%$

Généralisation : *L'écart relatif en pourcentage entre deux grandeurs de valeurs (x) et (y) est resopectivement donné par :*

$$\boxed{T = 100 \times (\frac{y - x}{x})} \quad \text{ou} \quad \boxed{T = 100 \times (\frac{x - y}{y})}$$

IV- CALCULER LA VALEUR INITIALE D'UNE GRANDEUR APRÈS VARIATION

On sait que $y = (1 + \frac{t}{100})\, x$ (augmentation)

⇨ On a donc $\boxed{x = \dfrac{y}{1 + \dfrac{t}{100}}} = \dfrac{100y}{100 + t}$

On sait que $y = (1 - \frac{t}{100})\, x$ (diminution)

⇨ On a donc $\boxed{x = \dfrac{y}{1 - \dfrac{t}{100}}} = \dfrac{100y}{100 - t}$

ou, synthétiquement $\boxed{x = \dfrac{y}{1 + \dfrac{T}{100}}}$ avec $T > 0$ ou $T < 0$

Exemple 1 : Un village a sa population qui augmente de 28%. Sa nouvelle population est de 1 536 habitants. Quelle était son ancienne population ?

<u>Réponse</u> : $x = \dfrac{1\,536}{1 + \dfrac{28}{100}} = \dfrac{1\,536}{1{,}28} = 1\,200$ habitants

Exemple 2 : Un article coûte 557,42 F, toutes taxes comprises, de 18,60%. Quel est le prix hors taxes ?

<u>Réponse</u> : $\text{Pht} = \dfrac{\text{Ptc}}{1 + \dfrac{t}{100}} = \dfrac{557{,}42}{1 + \dfrac{18{,}6}{100}} = \dfrac{557{,}42}{1{,}186} = 470$ F

Remarque : en général, $\text{Ptc} = (1 + \frac{t}{100})\,\text{Pht}$ et $\text{Pht} = \dfrac{\text{Ptc}}{1 + \dfrac{t}{100}}$

Si $t = 33{,}33\%$, on prend $\frac{t}{100} = \frac{1}{3}$ et alors $\text{Ptc} = (1 + \frac{1}{3})\text{Pht} = \frac{4}{3}$ Pht.

Ainsi $\text{Pht} = \frac{3}{4}\,\text{Ptc}$ (cas des produits de luxe par exemple).

Exemple 3 : La production d'acier d'un pays diminue de 20% et se retrouve au niveau de 40 000 tonnes. Quelle était l'ancienne production ?

Réponse : $$x = \frac{40\,000}{1 - \frac{20}{100}} = \frac{40\,000}{0{,}80} = 50\,000 \text{ tonnes}$$

Exemple 4 : Prix après rabais d'un article : 510F. Rabais 15%. Prix initial ?

Réponse : $$x = \frac{510}{1 - \frac{15}{100}} = \frac{510}{0{,}85} = 600 \text{ F}$$

V - CALCULER LES VARIATIONS EN POURCENTAGE D'UNE GRANDEUR A PARTIR DES VARIATIONS EN POURCENTAGE DE SES PARTIES CONSTITUTIVES.

Exemple utile : Le prix de vente H.T. d'une marchandise, noté (x), se décompose comme suit : 40% pour le prix des matières premières ; 35% pour le coût salarial du travail nécessaire à sa fabrication, le reste, 25% pour le bénéfice réalisé lors de la vente.

On suppose, en outre, que le prix des matières premières augmente de 7%, les coûts salariaux de 8% et le bénéfice de 12%. Quel est, en pourcentage, l'augmentation du prix de la marchandise ?

Généralisation : Peut-on trouver une formule simple qui permette de calculer la variation en pourcentage t d'une grandeur (x), sachant que $x = a + b + c$ avec $a = p_1\%x$; $b = p_2\%x$ et $c = p_3\%x$ et avec une variation de $t_1\%$ pour a, $t_2\%$ pour b et $t_3\%$ pour c ?

Dans notre exemple : $p_1 = 40$; $p_2 = 35$: $p_3 = 25$.

$$t_1 = 7 \,;\, t_2 = 8 \text{ et } t_3 = 12$$

(t) est la variation en pourcentage cherchée de (x).

Solution :

$$a = \frac{p_1 x}{100} \,;\, b = \frac{p_2 x}{100} \,;\, c = \frac{p_3 x}{100}$$

$x = a + b + c$ donc :

$$a' = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) a \,;\, b' = \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) b \,;\, c' = \left(1 + \frac{t_3}{100}\right) c$$

$$x' = a' + b' + c'$$

pour les nouvelles valeurs après variations : $x' = (1 + \frac{t}{100})\, x$.

Les pourcentages

Parfois même, ils mentent

Fiable, inaltérable, inusable, le CD a sauvé la musique du couac et les maisons de disque de la faillite.
Histoire d'un miracle

En quatre ans, le prix du CD a baissé de 300%

En quatre ans, les prix ont chuté de 300%. Un CD sorti d'usine (support + boîtier + livret quatre pages) revient royalement à 8,50 F hors taxe.

Lu dans Télérama

Télémathématiques

«Dès 18 heures, le téléphgone est 30% moins cher, soit 30% de temps en plus»
...C'est bien la peine d'être, comme France Télécom, une pépinière de polytechniciens pour savoir si mal compter.

De fait, compte tenu de la valeur de la taxe de base - 0,73 franc pour 17 secondes - d'après ce qui est avancé à la fin de la phrase, après 18 heures, on peut parler pour 0,73 franc durant 22,1 sacondes (17 + 5,1). En revanche, d'après ce qui est dit au début, après 18 heures on peut parler durant 17 secondes pour 0,51 franc (70% de 0,73 franc)... et par conséquent 24,3 secondes pour 0,73 franc! Ceci n'égale donc pas cela...

France Télécom ne nie pas l'inexactitude de ce slogan. Si elle est erronée, cette pub n'est pas mensongère, affirme-t-elle car, dans tous les cas, l'accroissement de la durée sera supérieure à la baisse de tarif!

Le Monde : 28/4/90

***Problème** : à combien revenaient-ils donc (hors taxe) il y a quatre ans ?*

On a $\quad a' - a = \frac{t_1 a}{100}$; $b' - b = \frac{t_2 b}{100}$; $c' - c = \frac{t_3 c}{100}$; $x' - x = \frac{tx}{100}$

D'autre part : $x' - x = (a' + b' + c') - (a + b + c) = (a' - a) + (b' - b) + (c' - c)$

Donc : $x' - x = \frac{tx}{100} = \frac{t_1 a}{100} + \frac{t_2 b}{100} + \frac{t_3 c}{100}$ donc $tx = t_1 a + t_2 b + t_3 c$.

Mais d'après les valeurs relatives en % de a, b, c, on a :

$$tx = t_1 \frac{p_1 x}{100} + t_2 \frac{p_2 x}{100} + t_3 \frac{p_3 x}{100} \;;\; \left[\frac{t_1 p_1}{100} + \frac{t_2 p_2}{100} + \frac{t_3 p_3}{100}\right] x$$

D'où $\quad t = \frac{t_1 p_1}{100} + \frac{t_2 p_2}{100} + \frac{t_3 p_3}{100}$

Remarque : $p_1 + p_2 + p_3 = 100$ donc (t) s'écrit :

$$\boxed{t = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3}{p_1 + p_2 + p_3}}$$

On dit alors que (t), variation globale du prix (x), est égal à la *moyenne arithmétique pondérée* des taux de variation en pourcentage des parties de (x).

Cas particulier : Si $c = 0$, on a : $p_3 = 0$; $t_3 = 0$ et $x = a + b$. Si, en outre, (b) ne varie pas, $t_2 = 0$. Alors : $t = \frac{p_1 t_1}{100}$ (cas $p_1 + p_2 = 100$)

Exemple : Le coût de production (x) d'une marchandise est constitué de 45% de matières premières et 55% de main d'œuvre. On suppose que le coût de la main d'œuvre augmente de 10% et que les matières premières ne varient pas. Le prix de production de (x) augmente-t-il de 10% ?

<u>Réponse</u> : NON, car ici, $p_1 = 55$, $t_1 = 10$, donc $t = \frac{55 \times 10}{100} = 5{,}5$

VI- CALCULER L'INDICE DE VARIATION D'UNE GRANDEUR ET L'INDICE D'ÉCART.

Exemple 1 : L'évolution de la consommation de viande (en kg/tête/an) en U.R.S.S. a été la suivante :

1960	1965	1970	1980	1985
39,5	41,0	47,5	57,6	61,4

(En France, 93,5 kg en 1985)

Sources : Historiens et Géographes (revue de l'APHG) juin 1989.

En ramenant à 100 la consommation en 1960, quelles seraient les autres ?

1965: $\frac{100 \times 41}{39{,}5} \approx 104$ *1970:* $\frac{100 \times 47{,}5}{39{,}5} \approx 120$

1980: $\frac{100 \times 57{,}6}{39{,}5} \approx 146$ *1985:* $\frac{100 \times 61{,}4}{39{,}5} \approx 155$

On dit que *la base est 100 en 1960.*
Sous forme de tableau, on aurait :

0	1	2	3	4
1960	1965	1970	1980	1985
100	104	420	146	155

On écrira par exemple que $I_3 = 100\frac{V_3}{V_0}$ V_3 = valeur en 1980

V_0 = valeur en 1960
I_3 = indice en 1980.

Exemple 2 : La consommation de viande en 1983 était par exemple (kg/hab./an) :

FR.	IT.	G.B.	IRL	DAN	GR	ALL.	EUR des 10
108	75	72	98	80	79	97	88

(avec graisse de découpe) *Source : Eurostat).*

En prenant pour base 100 l'Europe des 10, on aurait (arrondis)

FR.	IT.	G.B.	IRL	DAN	GR	ALL	EUR. des 10
123	85	82	111	91	90	110	100

Généralisation : *Soit V_0 la valeur d'une grandeur considérée comme valeur initiale ou de référence. L'indice de la valeur comparée* V_1 *à cette valeur de référence est :*

$$\boxed{I_{0,1} = 100\,\frac{V_1}{V_0}}$$

Remarque : La valeur et l'indice d'une grandeur sont proportionnelles.

Exemple : dans le tableau précédent : $\frac{85}{75} = \frac{82}{72} = 1{,}13.$

Conséquence : on a $\boxed{V_1 = \frac{V_0 \times I_{0,1}}{100}}$

VII- CHANGER DE BASE INDICIAIRE *(Raccordement de tableaux d'indices)*

Exemple : considérons le prix d'un produit.

	1960	1970	1980	
	12 F	?	?	
Indices	100	160		
		100	175	Base 100 en 1960
	100	160	?	Base 100 en 1970

<u>Réponse</u> : Prix en 1970 : $\dfrac{12 \times 160}{100} = 19{,}20$ F

Prix en 1980 : $\dfrac{19{,}20 \times 175}{100} = 33{,}6$ F

Indice des prix en 1980, base 100 en 1960 : $100 \times \dfrac{33{,}6}{12} = 280$

Or, on constate que $\dfrac{160 \times 175}{100} = 280$.

En général :

Si l'on a fixé la base 100 à une époque *(O)*,
Si, à l'époque *(K)*, on repart sur la base 100,
Si $I_{K,O}$ est l'indice à l'époque *(K)* par rapport à l'époque *(O)*,
Si $I_{n,K}$ est l'indice à l'époque *(n)* par rapport à l'époque *(K)*,

Alors on a : $\boxed{I_{n,O} = I_{K,O} \times I_{n,K}}$

VIII- RELIER L'INDICE DE VARIATION (OU D'ÉCART) AU TAUX DE VARIATION (OU D'ÉCART) EN POURCENTAGE.

1) On sait que $t = 100 \dfrac{y - x}{x}$. En prenant $V_0 = x$ et $V_1 = y$, on a

$t = 100 \dfrac{V_1 - V_0}{V_0}$ en prenant les notations utilisées au paragraphe VI.

Donc $t = 100 \dfrac{V_1}{V_0} - 100 \dfrac{V_0}{V_0} = I_{0,1} - 100 \qquad t = I_{0,1} - 100$

Exemple 1 : Dans l'exemple 1 du paragraphe VI, la variation de consommation de viande de 1960 à 1980 est donc de $t = 146 - 100 = 46\%$.

Exemple 2 : Dans l'exemple 2 du paragraphe VI, l'écart de consommation de viande entre la Grèce et la moyenne de l'Europe des 10 est $90 - 100 = -10\%$

2) *Variation en pourcentage entre 2 époques quelconques ou écart en pourcentage entre deux valeurs quelconques.*

Problème : A la seule vue du tableau d'indices (Exemple 1 du paragraphe VI), peut-on dire quelle a été la variation de consommation de viande en % de 1965 (indice 104 arrondi de 103,797) et 1980 (indice 146, arrondi de 145, 823) ?

Erreur à ne pas faire : 146 - 104 = 42% !!!

Réponse : On vérifie que $t = 100 \times \dfrac{57{,}6 - 41}{41}$

$$= 100 \times \frac{103{,}797 - 145{,}823}{145{,}823} = 40{,}48.$$

La variation en % d'une grandeur est égale à la variation en % de son indice.

Preuve : Soit X_0 une valeur d'indice 100. Soient x et y deux autres valeurs.

On a $t = 100\dfrac{y - x}{x}$; l'indice de x : $I_x = 100\,\dfrac{x}{x_0}$

L'indice de y : $I_y = 100\,\dfrac{y}{x_0}$

La variation de l'écart de l'indice est :

$$t' = 100\,\frac{I_y - I_x}{I_x} = 100\left[\frac{100\,\frac{y}{x_0} - 100\,\frac{x}{x_0}}{100\,\frac{x}{x_0}}\right]$$

$$t' = 100\left[\frac{100(y - x)}{x_0}\right] \times \frac{x_0}{100\,x} = 100\,\frac{y - x}{x} = t$$

Exemple : La production de viande pour chiens d'un pays passe de l'indice 130 à l'indice 169. Quelle est la variation de la production en % ?

Réponse : $t = 100\dfrac{169 - 130}{130} = \dfrac{3\,900}{130} = 30.$

La production augmente donc de 30%.