Courrier des lecteurs

Une jolie petite formule de calcul des Probabilités

Notre collègue Edith Kosmanek a publié, dans le n°370 de notre *Bulletin* (p.514) un tableau des lois de probabilité discrètes usuelles et de leurs relations. Elle nous communique la remarque suivante : Soit S_n le nombre de boules blanches tirées dans une urne bicolore en n tirages et soit T_k le nombre de tirages nécessaires pour obtenir k blanches, on a la formule :

pour $1 \leq k \leq n$, $P(t_k = n) = \frac{k}{n} P(S_n = k)$ et ceci, que les tirages soient effectués *avec* ou *sans* remise.

Plus généralement, on trouverait le même résultat si l'on effectuait les tirages suivant le modèle introduit par POLYA en 1923 (cf par exemple A.RENYI, *Calcul des Probabilités,* DUNOD 1966 - page 84) : à chaque tirage, on remet la boule tirée *et c* boules de la même couleur ($c \geq -1$) ; les tirages sans remise correspondent à $c = -1$, ceux avec remise à $c = 0$.

Le résultat repose sur l'observation suivante : soit $\{A_i\}$ $i \in \mathbf{N}$ une suite d'événements, $S_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$ le nombre d'événements réalisés parmi les n premiers, T_k le nombre minimum d'observations à faire pour que k événements soient réalisés ; on a :

$$\{T_k = n\} = \{S_n = k\} \cap \{S_{n-1} = k-1\}$$
$$= \{S_n = k\} \cap A_n$$

et on en déduit $P\{T_k = n\} = P\{S_n = k\}P\{A_n / S_n = k\}$.

Si $P\{A_n / S_n = k\}$ ne dépend pas de i pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$P\{A_n / S_n = k\} = \frac{k}{n}$$

En effet : $P\{A_n / S_n = k\} = E\{ 1_{A_i} / S_n = k\}$ et

$$\sum_{i=1}^{n} P\{A_i / S_n = k\} = E\{S_n / S_n = k\} = k$$

Pour les tirages dans une urne de Polya, $P(A_i / S_n = k)$ ne dépend pas de i car un calcul direct montre que pour toute *permutation* $\{i_j\}$, des entiers 1,2,... , n , $P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \bigcap_{j=k+1}^{n} \overline{A_{i_j}}\right)$ ne dépend que de k et de n.

On en déduit que $P(A_i \cap \{S_n = k\})$ ne dépend par de i, donc de même $P(a_i / S_n = k)$