Les sujets d' étude

Robert FERREOL

lycée d' Enghien (95).

La recherche de "sujets d'étude" est motivante pour les élèves, leur permet de mieux comprendre ce que sont les mathématiques et de tirer enfin profit des corrections que nous faisons.

Le constat de départ est le même que celui de tous les collègues en général et de R. Chuzeville en particulier (Cf *Bulletin* n°375 p. 461) : les heures que nous passons à corriger des devoirs ne servent à rien, ou plutôt, elles servent à évaluer le niveau des élèves, mais ils n'en tirent strictement aucun bénéfice.

R. Chuzeville propose de très intéressantes méthodes pour que les élèves participent eux-mêmes à la correction de leur devoir (il est clair que l'auto-correction est ce qu'il y a de plus profitable pour l'élève). Je crois cependant que les correction, recorrection, et rerecorrection du même devoir finissent par lasser professeur et élèves...

Je souhaiterais seulement parler d'une expérience concluante, menée cette année en classe de math. sup., mais qui, je pense, vaut la peine d'être tentée dans toute classe ou période n'exigeant pas trop de bachotage, comme la Seconde, la Première, ou le premier trimestre de Terminale : il s'agit de remplacer la moitié des devoirs en temps libre par ce que j'ai appelé des "sujets d'étude".

Au début de chaque trimestre, je donne une liste de sujets à énoncés brefs, mais dont la résolution demande des qualités d'imagination, de recherche et de rigueur. Il faut que ce soit difficile, mais faisable (à commencer par vous !). Attention de ne pas sous-estimer les capacités de vos élèves : avec les sujets d'étude, les élèves que vous avez catalogués comme nuls vont se révéler à vous, et même vous vexer en résolvant des questions sur lesquelles vous avez vous-même séché !

Donnez un nombre de sujets légèrement supérieurs au nombre d'élèves, pour qu'ils puissent rejeter ceux qu'ils trouvent vraiment infaisables (que vous pourrez toujours redonner dans la fournée suivante). Il est important que chaque élève ait un sujet différent, ce qui demande une certaine organisation jusqu'à ce qu'ils aient fait leur choix. Vous pouvez intervenir pour que chacun ait un sujet adapté à son niveau. Les élèves savent alors que le sujet doit être rendu et corrigé avant la fin du trimestre.

Voici les principes de notation que j'ai établis :

➨ Si l'élève rend une copie parfaite du point de vue de la résolution et de la rédaction, je lui attribue 2 points, qui viendront s'ajouter à sa moyenne trimestrielle, et j'essaie de lui proposer des prolongements qui pourront lui rajouter un point supplémentaire.

➨ Si le problème est résolu mais avec des imperfections, j'attribue un point et rend la copie pour amélioration.

➨ Si la résolution est partielle ou fausse je rends la copie corrigée sans note.

Pour que l'élève puisse ressentir le plaisir d'avoir " fait quelque chose en math ", je pense qu'il faut être assez strict en ne lui donnant les indications qu'au compte-goutte et en exigeant de lui une rédaction parfaite (vous serez d'ailleurs étonné de ce qu'il peut arriver à faire); c'est ainsi que le trimestre dernier, j'ai mis une fois +3, vingt deux fois +2, neuf fois +1 et quatre fois rien.

Voici les multiples avantages que je trouve à cette formule :

1. Les élèves résolvent par eux-mêmes de A à Z un problème de mathématiques, en comprenant ce qu'ils font.

2. Alors que dans les devoirs classiques, les élèves se contentent en général de grappiller des points sur ce qu'ils savent faire (sans imaginer d'ailleurs à quoi cela peut bien servir), en refaisant toujours les mêmes erreurs, car ils ne lisent pas ou ne comprennent pas les corrections du professeur, vous pouvez ici les amener jusqu'à la rédaction parfaite, ce qui constituera un acquis mille fois supérieur à celui qui consiste à ne répondre qu'aux questions 1.a et 1.b de 100 devoirs.

3. Les élèves ne peuvent copier les uns sur les autres puisque tous les sujets sont différents.

4. La notation est vécue de façon positive puisqu'elle ne peut que remonter la moyenne.

Voici pour les élèves, direz-vous, mais pour les professeurs, corriger 36 devoirs au lieu d'un seul, non merci !

En fait l'impression débilitante que l'on a lors de la correction d'un devoir classique provient de la répétition du sujet. Au bout d'une vingtaine de copies, même une très bonne résolution n'arrive plus à éveiller notre intérêt, tant nous n'avons été agacés (ou endormis) par tant d'âneries répétées. Point de tout cela dans la correction du sujet d'étude. Il vous faudra tout d'abord vous remémorer votre propre résolution, puis inévitablement vous laisser entraîner par l'élève sur d'autres chemins, souvent passionnants, qui seront parfois des fausses routes (rarement, car l'élève le sent très bien et ne rend alors pas sa copie) mais dont vous pourrez toujours tirer un enseignement. Dans une correction normale, la moitié du temps est consacrée à l'attribution des points, demi-points et quarts de point ; ici, vous pourrez vous consacrer entièrement à conseiller l'élève (et vous savez qu'il sera obligé d'en tirer profit), la notation (rien, +1 ou +2) se faisant instantanément. Le temps passé sera à peine plus long que pour une copie classique et nettement plus agréable. Le seul risque est que vous soyez obligé de reconsidérer votre démonstration, car l'élève en a trouvé une meilleure!

D'autre part vous comprendrez mieux où se situent les difficultés de votre élève et quelles sont les causes de ses erreurs répétées dans les devoirs classiques. J'ai fini moi-même par saisir que les deux causes principales sont le manque de temps et l'impression de ne pas comprendre ce que l'on fait et pourquoi on le fait. Alors, puisqu'il faut grappiller des points, on assemble au hasard des mots magiques qui se trouvent dans le cours...

Mais voici une autre objection à cette formule. Pendant que les élèves sèchent des heures et des heures sur un problème portant sur un domaine très limité du programme, il ne font pas les exercices, dits classiques, qu'il faut avoir faits pour comprendre chaque partie du cours. Je pense tout d'abord que le bénéfice obtenu lorsqu'on a *fait* des mathématiques est supérieur à celui obtenu lorsqu'on a simplement suivi la méthode proposée dans l'exercice classique. Mais l'objection est de taille, c'est pourquoi je n'ai pas du tout abandonné mon arsenal d'exercices et de devoirs habituels et que je ne proposerais pas les sujets d'études dans une période de bachotage avant examen.

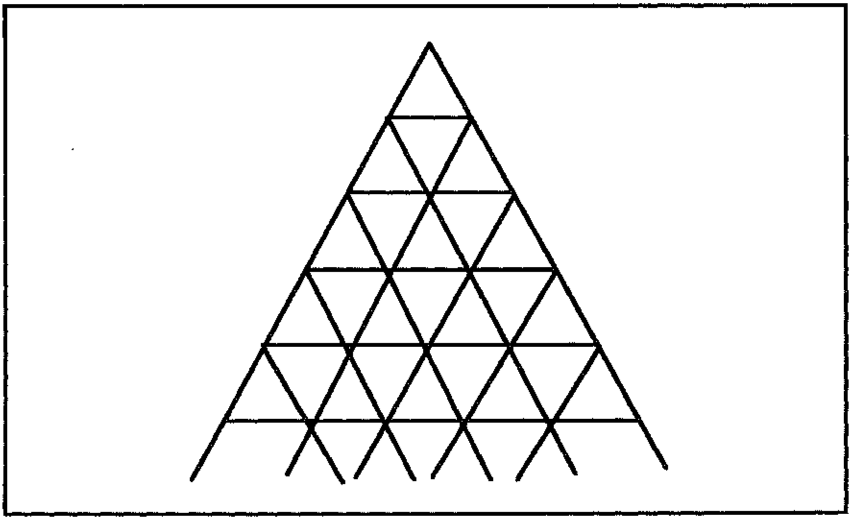
Voici pour finir quelques énoncés qui ont bien marché. Ils sont évidemment adaptés à des élèves de mathématiques supérieures, d'un lycée au recrutement peu ambitieux au demeurant, mais peuvent être transposés à d'autres niveaux. De nombreuses idées se trouvent dans les références ci-dessous.

Ex.1: *trouver tous les couples (f,g) de fonctions* $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ *dérivables sur* $\mathbf{R}$ *vérifiant pour tout (a,b) de* $\mathbf{R}^2$

$$f(a+b) = f(a)f(b) - g(a)\,g(b)$$
$$g(a+b) = g(a)\,g(b) + f(a)f(b)$$

Ce n'est qu'à la quatrième mouture que l'élève a réussi à avoir toutes les solutions et à prouver qu'il les avait toutes. Une cinquième rédaction aurait permis de clarifier les raisonnements. Mais en tout cas, l'élève connait maintenant la différence entre trouver *des* couples et trouver *les* couples, et il a repris une équation fonctionnelle pour le sujet suivant !

Ex.2: *présentant une figure formée d'un triangle découpé en* n^2 *petits triangles, je demande: combien de triangles? Combien de parallélogrammes?*



Donné à un élève que je pensais très faible, et qui, à force de ténacité, est arrivé aux deux résultats, alors que je séchais moi-même sur le nombre de triangles qui ont la tête en bas.

> **Ex.3**: *pour $n \geq 2$, $1+1/2+1/3+...+1/n$ peut-il être un nombre entier?*
>
> **Ex.4** : *1. Ma calculette ne possède que les opérations +, -, et 1/x; comment programmer* x ?
>
> *2. Déterminer toutes les applications de* $\mathbf{R}$ *vers* $\mathbf{R}$ *vérifiant;*
>
> $$f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ pour } x,y \text{ dans } \mathbf{R}$$
> $$\text{et } f(1/x)=1/f(x) \text{ pour } x \text{ dans } \mathbf{R}^*.$$

Pour ces deux exemples, les élèves sont venus me supplier de leur donner des indications. J'ai tenu bon, et ils ont, pour finir, trouvé deux démonstrations chacun de leur problème, l'un d'entre eux ayant de plus découvert par lui-même le postulat de Bertrand, dont il avait besoin. Par la même occasion, j'ai moi-même découvert que le postulat de Bertrand n'était pas seulement une curiosité, mais qu'il pouvait servir dans des démonstrations.

> **Ex. 5**: *Etudier les suites (u_n), (v_n), (w_n), définies par $u_0=a$, $v_0=b$, $w_0=c$, $(0< a \leq b \leq c)$ et*
>
> $$1/u_{n+1}=(1/u_n+1/v_n+1/w_n)/3$$
> $$v_{n+1}=(u_n\, v_n\, w_n)^{1/3}$$
> $$w_{n+1}=(u_n+v_n+w_n)/3$$

Ayant besoin de prouver que $(xyz)^{1/3} \leq (x+y+z)/3$, l'élève a tout d'abord utilisé la concavité de ln. La soupçonnant d'avoir trouvé cela dans un livre, je lui ai demandé une autre démonstration, pensant à une étude de fonction. Pour finir, elle a trouvé une jolie démonstration utilisant la factorisation de $a^3 + b^3 + c^3 - 3a\,b\,c$.

Il est à noter que les exemples que je viens de citer ne concernent pas les meilleurs élèves, qui, eux, ont été à la limite un peu décevants, en rédigeant correctement leur exercice sans plus...

Références:

AKKAR M. et M.-T., EL MOSSADEQ A.I.(1985):*les mathématiques par les problèmes*. Sochepress.

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M., PICHOD D. (1984): *la pratique du problème ouvert*. IREM de Lyon.

CASIRO F., CUCULIERE R., FERREOL R. (1990) : *Annales corrigées du concours général et des olympiades internationales de mathématiques*. Editions du choix.

HONSBERGER R. (1979): *Joyaux mathématiques*. 2 volumes. CEDIC.

SIERPINSKI W.(1972): *250 problèmes de théorie élémentaires des nombres*. Hachette.