Didactique

Une méthode de démonstration consistant à "Partir de la conclusion" (*)

André Antibi
IREM de Toulouse

Cet article propose une méthode de résolution de problèmes qui me semble très importante : celle qui consiste à "partir de la conclusion" ou encore, avec la terminologie utilisée en Intelligence Artificielle, le chaînage arrière. Il ressort des tests et des divers entretiens que j'ai eus à ce sujet qu'une grande majorité d'enseignants et donc d'étudiants, utilisent très peu cette méthode, ce qui, souvent, peut compliquer considérablement la résolution de certains problèmes.

J'essaierai donc d'expliquer cette situation et je ferai quelques suggestions pour que, dans notre enseignement, on utilise davantage cette méthode de résolution, y compris au niveau de la rédaction d'une solution.

(*) Extraits du chapitre 2 de la thèse d'André Antibi, publiée en 1988, 330 pages, *"Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions"*. Ouvrage disponible à l'IREM de Toulouse (50F + port).

"PARTIR DE LA CONCLUSION" - EXEMPLES.

De quoi s'agit-il exactement?

Dans les problèmes où la solution est connue, si on note (H) l'ensemble de toutes les hypothèses (spécifiques au problème considéré et non spécifiques) dont on dispose, faire une démonstration (C) consiste à établir une suite finie $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de propriétés telles que chacune d'elles se déduise des précédentes et de (H) et telle que P_n soit la propriété (C) :

$$(H) \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_n \equiv (C)$$

Dans certains problèmes, surtout lorsque "la distance de (H) à (C) est trop grande", on a parfois beaucoup de mal à trouver certaines des propriétés P_i. Il peut alors être avantageux d'essayer de faire faire "un bout de chemin à (C)" ; plus précisément, on peut essayer de remplacer (C) par une propriété P_{n-1} qui implique (C), ou, *a fortiori*, qui est équivalente à (C). Il suffit alors de démontrer, à partir de (H), la propriété P_{n-1}. On peut aussi remplacer P_{n-1} par une propriété P_{n-2} qui implique P_{n-1}. Il suffit alors de démontrer que (H) implique P_{n-2} ; ainsi de suite. On peut parfois, en procédant ainsi, remonter jusqu'à (H).

Il est clair qu'une démonstration qui a été trouvée en partant de la conclusion peut toujours être reconstituée et rédigée en partant de (H) : il suffit d'écrire les diverses propriétés "dans le bon ordre". Mais, très souvent, des propriétés qui sont apparues de manière naturelle en partant de (C) peuvent alors sembler tout à fait "parachutées" et faire penser à de la "prestidigitation" [1]. Nous en verrons des exemples ci-dessous.

Il convient de remarquer dès à présent que, lorsqu'on "part de (C)", il ne s'agit pas de remplacer (C) par une propriété P qui se déduit de (C) et de démontrer que (H) implique P.

(1) $$(H) \Rightarrow (C) \Rightarrow P$$

(Dans ce cas, on pourrait dire que l'on a "éloigné" (C) de (H) au lieu de le "rapprocher).

Lien avec le raisonnement par l'absurde et le raisonnement plausible.

La manière de procéder décrite en (1) peut être très utile, mais dans un contexte tout à fait différent : plus précisément, supposons que l'on ne soit pas sûr que la propriété (C) soit vraie. On est alors en présence d'une conjecture : il ne s'agit plus de démontrer (C) mais de dire si (C) est vraie ou fausse et de justifier sa réponse. Les chercheurs sont souvent confrontés à ce genre de situation. Dans ce cas, pour pressentir la réponse, on peut essayer de trouver des propriétés qui se déduisent de (C). Si l'une de ces propriétés n'est pas vraie, on en déduit que (C) n'est pas vraie : c'est ainsi que l'on démontrerait *par l'absurde* que (non(C)) est vraie. S'il apparaît qu'une propriété vraie peut se déduire de (C), ceci ne signifie pas que (C) est vraie ; par contre, il est assez légitime dans ce cas de considérer que (C) a davantage de "chances" d'être vraie ou encore est "plus croyable"(*). POLYA fait une étude remarquable de ce genre de raisonnement qu'il appelle "raisonnement plausible" [2], [3].

Ainsi on peut dire qu'il y a deux autres types de raisonnement dans lesquels, d'une certaine manière, on "part de la conclusion" : le raisonnement par l'absurde, d'un usage courant dans notre enseignement (dans ce cas, en supposant (H) vraie, on part en réalité de (non (C)) et non de (C)), et le raisonnement plausible qui n'est pas à proprement parler un raisonnement démonstratif mais qui, cependant, peut être très utile dans les conjectures.

Exemples :

Nous allons étudier deux exemples "apparemment simples"(**), de niveau lycée (ou même collège), afin de mieux mettre l'accent sur les méthodes de résolution. Le premier sera l'exercice proposé dans l'un des tests ci-dessous. Il me semble intéressant de commenter la résolution de cet exercice en tenant compte (avec un peu d'anticipation sur l'analyse détaillée des résultats des tests qui va suivre) du comportement de beaucoup de personnes interrogées face à ce problème.

Exemple 1 :

> Soit a, b, c, trois nombres ≥ 0 tels que $a \leq b + c$.
>
> Démontrer que : $\dfrac{a}{1+a} \leq \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c}$.

(*) Terminologie utilisée par Polya.

(**) Les résultats des enseignants et des étudiants aux tests ci-dessous nous incitent à une certaine prudence concernant la notion de "simplicité".

Les hypothèses spécifiques, ici, sont les suivantes : a, b et c sont des nombres ≥ 0 et $a \leq b + c$.
La conclusion est la propriété

(C) $$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

Pour démontrer cette propriété, on dispose des hypothèses spécifiques précédentes et de toutes les propriétés supposées connues au moment où on aborde ce problème : nous appelons ces propriétés "les hypothèses non spécifiques". (H) désigne l'ensemble de toutes les hypothèses.

Il est peut-être normal, dans un premier temps, de partir de (H) en essayant de déduire des hypothèses spécifiques une propriété se "rapprochant" de (C). L'hypothèse spécifique qui semble le plus liée à la nature de (C) est l'hypothèse "$a \leq b + c$". Il est "normal" d'essayer d'utiliser cette hypothèse-là, en tenant compte de la propriété à démontrer : c'est ce que beaucoup ont fait : on a par exemple des débuts de démonstration tels que :

(H_1) $$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a} \qquad \text{(car } 1 + a > 0\text{)}$$

(H_2) $a + 1 \leq b + c + 1$ ou (H'_2) : $(a + 1) \leq (b + 1) + (c + 1)$

On peut alors se rendre compte "intuitivement" qu'il est difficile d'avancer à partir de ceci : par exemple, pour démontrer (C) à partir de (H_1), il suffirait par exemple que :

$$\frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

Or ceci n'est pas forcément vrai (il suffit pour s'en assurer de prendre $a = 0$ et $b = c = 1$).

Dans une telle situation, il me semble alors tout à fait normal d'essayer de "partir de la conclusion", d'autant plus qu'ici on n'a même pas besoin d'imaginer une propriété *suffisante* pour que (C) soit vraie : on a la possibilité de transformer (C) de manière tout à fait classique, par équivalence. Dans ce cas, je pense que ceci devrait être absolument considéré comme un réflexe compte tenu du blocage rencontré quand on part des hypothèses. Les résultats des tests ci-dessous montreront clairement que ce n'est pas un réflexe, loin s'en faut.

Je propose une solution :

Démonstration (1) :

> a, b, c étant ≥ 0, (C) est équivalente aux propriétés (C_1), (C_2) et (C_3) suivantes obtenues respectivement en multipliant les deux membres de (C) par le dénominateur commun $(1+a)(1+b)(1+c)>0$, puis en simplifiant l'inégalité obtenue :
>
> (C_1) $a(1+b)(1+c) \leq b(1+a)(1+c)+c(1+a)(1+b)$
>
> (C_2) $a(1+b+c+bc) \leq b(1+a+c+ac)+c(1+a+b+ab)$
>
> (C_3) $a \leq b+c+2bc+abc$.
>
> Or, puisque a, b , c sont ≥ 0 et que $a \leq b+c$, (C_3) est vraie.
>
> La propriété (C) est donc vraie.

On peut, comme je l'ai dit précédemment, rédiger cette démonstration en partant de (H). On pourrait alors avoir quelque chose du genre :

Démonstration (2) :

> Puisque a, b, c sont ≥ 0 , $2bc + abc$ est ≥ 0 ; d'où, en ajoutant au deuxième membre de l'inégalité "$a \leq b + c$" le nombre ≥ 0 $2bc + abc$ on obtient (C_3).
>
> Ajoutons aux deux membres de l'inégalité (C_3) la quantité positive $ab + ac + abc$. En regroupant convenablement les termes, on obtient (C_2), puis, en factorisant convenablement, (C_1). Il suffit alors de diviser les deux membres de (C_1) par la quantité >0 $(1 + a)(1 + b)(1 + c)$ pour obtenir (C).

Cette solution fera peut-être sourire certains. Cependant, il ressort des entretiens que nous avons eus avec des enseignants et des étudiants et de l'analyse de livres, que, souvent, dans une situation de ce genre, on procède ainsi (tout au moins au niveau de la rédaction de la démonstration). Des étapes que l'on peut considérer comme tout à fait naturelles en partant de (C) apparaissent alors comme très "astucieuses". On peut facilement imaginer alors la réaction d'élèves à qui on présenterait une telle solution sans dire d'où elle sort!

Exemple 2

L'exercice suivant est extrait d'un devoir, posé dans une classe de seconde concernant l'étude d'une manière possible de trouver un encadrement du nombre $\sqrt{3}$.

Soit x un nombre $\geq \sqrt{3}$. Montrer que :

1°) $\frac{3}{x} \leq \sqrt{3}$

2°) $\frac{1}{2}(x + \frac{3}{x}) \leq x$

3°) $\frac{1}{2}(x + \frac{3}{x}) \geq \sqrt{3}$

Dans les trois questions la conclusion est connue. On peut remarquer qu'ici les questions sont formulées de telle sorte que, pour chacune d'elles, il n'y a pas à proprement parler d'hypothèses spécifiques. On sait, bien sûr, que l'on dispose des résultats établis dans les questions précédentes mais on ne sait pas lesquels vont être utiles. Cette situation se retrouve fréquemment dans des énoncés de problèmes.

Nous nous intéresserons surtout à la troisième question ; mais on peut dire un mot des deux premières. Dans ces deux cas, on peut, sans difficulté, partir des hypothèses : elles peuvent se transformer assez naturellement en tenant compte du résultat à établir. Indiquons brièvement une solution.

1ère question :

$$x \geq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{3}{x} \leq \sqrt{3}$$

2ème question :

$$\frac{3}{x} \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}\right) \leq \frac{1}{2}\sqrt{3} \leq \frac{1}{2}x$$

D'où $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}\right) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x$

Donc $\frac{1}{2}(x + \frac{3}{x}) \leq x$.

Signalons que, en réalité, pour trouver ces deux démonstrations, on transforme vraisemblablement la conclusion au départ, mentalement en tout cas.

Ainsi, pour la première, l'idée d'écrire "$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$" est vraisemblablement due au fait que l'on a remarqué auparavant que "$\frac{3}{x} = 3.\frac{1}{x}$". De même, dans la deuxième démonstration, l'étape "$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\frac{3}{x}) \leq x$" est vraisemblablement pressentie en transformant au départ la conclusion. Mais dans ces deux cas, surtout dans le premier, la transformation de la conclusion est simple et on peut se contenter de la faire mentalement, sans l'écrire (on a vu dans l'exemple précédent qu'il n'en est pas toujours ainsi!). Il me semble néammoins que, même dans ce genre de situation, il conviendrait de préciser aux élèves comment une telle démonstration peut se trouver. Certains pourraient croire en effet qu'il suffit de "combiner" entre elles toutes les hypothèses et qu'ainsi, avec un peu de chance, on "arrivera à la conclusion".

La troisième question est tout à fait différente. Si après avoir développé mentalement "$\frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$", on essaie de partir des hypothèses dont on dispose, on n'obtient rien. On va voir qu'une transformation plus "profonde" de la conclusion est utile dans ce cas et cette transformation (sauf peut-être pour des personnes particulièrement entraînées à cela!) ne peut être faite uniquement mentalement : on doit l'écrire. Ceci ne signifie nullement, comme on va le voir, que cette transformation soit difficile. Précisons cela en indiquant une solution possible de cette question.

> x étant >0, il est clair, d'après les propriétés classiques de la relation "$\leq$" dans $\mathbb{R}$, que (C) est équivalente aux propriétés suivantes :
>
> (C_1) : $\frac{1}{2}(x^2+3) \geq \sqrt{3}\,x$
>
> (C_2) : $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 \geq 0$
>
> (C_3) : $(x - \sqrt{3})^2 \geq 0$
>
> (C_3) étant toujours vraie, on en déduit que (C) est vraie.

Comme on le verra ci-dessous, il semble que de nombreux enseignants ne rédigeraient pas la démonstration ainsi : ils partiraient des hypothèses. On aurait alors des solutions du type :

> On remarque que, comme tout carré, on a : "$(x - \sqrt{3})^2 \geq 0$". On en déduit alors immédiatement (C_2) et (C_1), puis (C) en divisant les deux membres de (C_1) par le nombre $x > 0$.

Comme dans l'exemple précédent, il est facile d'imaginer la réaction d'un élève à qui on présenterait une telle solution sans dire d'où "sort" la première étape $(x - \sqrt{3})^2 \geq 0$ " !

Remarque :

Dans la troisième question, on peut constater que le résultat est vrai pour tout nombre $x > 0$. En d'autres termes, on n'a pas utilisé complètement l'hypothèse "$x \geq \sqrt{3}$ " et on n'a pas utilisé les résultats des questions précédentes. Ceci arrive fréquemment dans les énoncés comportant plusieurs questions : on n'indique pas dans chaque question les hypothèses utiles pour la question.

Ceci est une raison supplémentaire pour partir de la conclusion : on utilise alors les hypothèses au fur et à mesure des besoins plutôt que de s'acharner à essayer de la "combiner" pour arriver jusqu'à (C) (dans le cas où le passage de (H) à (C) n'apparaît pas immédiatement, bien sûr).

> ***Le paragraphe 2*** *évoque le poids de la tradition et présente "quelques points de vue d'enseignants et d'étudiants". En général, le fait de partir de la conclusion est considéré comme un procédé pas très sérieux, incorrect même (les tests qui ont suivi confirment ce point). Dans le meilleur des cas, on peut l'utiliser au brouillon quand on cherche. Mais toutes les personnes interrogées semblaient d'accord sur un point : on ne procède jamais ainsi quand on rédige.*
>
> ***Le paragraphe 3*** *étudie le comportement d'enseignants (37), candidats au CAPES (20), étudiants autres (48), pour résoudre un problème où le fait de partir de (C) est très utile (il s'agit de la vérification de l'inégalité triangulaire par d' tel que $d' = d/1 + d$, d étant une distance...). Seulement 10% des personnes interrogées ont eu l'idée de partir de (C). Pourtant, pour les autres, l'échec a été quasi-total.*
>
> ***Le paragraphe 4*** *examine les réactions des mêmes personnes en présence de deux démonstrations (justes) du problème précédent : l'une (S_1) "savante", à partir des hypothèses, utilisant la croissance de la fonction $x \to x/(x + 1)$, l'autre (S_2), "simple", utilisant très peu de choses mais faite à partir de la conclusion.*

La méthode (S_2) "trouble" beaucoup, tant les enseignants que les étudiants, 10% d'enseignants et 40% d'étudiants la jugeant même fausse ! La préférence pour (S_1) est très nette : parmi les raisons les plus souvent citées : "on va de (H) vers (C)" et "c'est plus élégant"...

COMMENTAIRES ET SUGGESTIONS

Il ressort de l'étude que nous venons de faire que la méthode de démonstration consistant à partir de la conclusion est très peu utilisée, souvent même déconseillée, et parfois même interdite par de nombreux enseignants. Comme on l'a vu, cette méthode peut être utile. Certains collègues estiment que l'on peut, à la rigueur, l'utiliser dans une recherche mais pas quand on rédige.

Il semble, d'après les résultats des tests, que, à force de ne jamais utiliser cette méthode quand on rédige ou quand on fait un cours, on n'y pense plus quand on cherche. Ainsi, très nombreux sont les enseignants qui se trouvent bloqués en présence d'un exercice assez élémentaire pourtant.

On peut se demander pourquoi une telle méthode aussi utile est si peu utilisée. Est-ce par pure tradition? Au collège, on peut à la rigueur penser qu'il faut éviter de perturber les élèves en partant de la conclusion car ils ont déjà assez de mal à comprendre ce qu'est une démonstration. Mais au lycée, cet argument est beaucoup moins valable. En tout cas, il ne l'est plus du tout à l'université. Or, les tests ou les entretiens le montrent clairement : la situation est tout à fait analogue qu'au collège! Une démonstration "doit" se rédiger en partant des hypothèses et en arrivant à la conclusion.

Personnellement, je ne vois pas pourquoi une démonstration rédigée ainsi est préférable. On y gagne peut-être un peu en clarté (c'est en tout cas ce que pensent certains) mais on y perd tellement en efficacité pour l'appren-tissage de la résolution de problèmes. Or c'est ce domaine qui, à mon avis, devrait être le plus important dans notre enseignement.

Pour améliorer la situation, on pourrait essayer peut-être de modifier nos habitudes et de ne plus faire de cassure entre la phase de recherche et la phase d'exposition ; d'autant plus que, comme on n'a pas le temps de s'occuper convenablement des deux, la phase de recherche est souvent négligée.

ON DEVRAIT DONC RÉDIGER COMME ON CHERCHE

Sinon, on l'a vu, on a tendance à chercher comme on rédige, souvent sans s'en rendre compte, et alors on peut être dérouté par des exercices simples.

Précisons ce que l'on entend par "rédiger comme on cherche". Il ne s'agit pas d'expliciter toutes les idées que l'on a pu avoir pour résoudre le problème, quoique ce genre d'activités pourrait être très intéressant. Il s'agit simplement de présenter la démonstration clairement, en ne faisant état que des étapes utiles, mais en les présentant dans le même ordre que pour la recherche.
En procédant ainsi, perdrait-on réellement en clarté? Je ne le pense pas. Pourquoi une démonstration rédigée en partant de la conclusion serait-elle moins "claire" qu'en partant des hypothèses? Cette notion de "clarté" est à mon avis très subjective et est essentiellement liée à une question d'habitudes. En ce qui me concerne, je ne considère pas la démonstration (1) de l'exemple 1 comme une démonstration moins claire que la démonstration (2) : la transformation de (C) par équivalence (propriétés (C_1), (C_2), (C_3)) est du niveau d'une classe de 4ème, et la dernière étape, faisant intervenir une condition suffisante cette fois, me semble tout à fait évidente. Il est vrai que, lorsqu'on n'a pas l'habitude d'un tel type de présentation, on peut être perturbé. Mais je suis convaincu que c'est une question d'habitude.

L'argument selon lequel on risque moins de "s'embrouiller dans les équivalences et les implications" quand on part de (H) vers (C) ne me convaint pas non plus. Actuellement, beaucoup de collègues de lycée et d'université déplorent le fait que les élèves éprouvent des difficultés à ce sujet (confusion entre condition nécessaire et condition suffisante, oubli de la vérification d'une réciproque...). Je ne pense pas que la situation serait pire en rédigeant certaines démonstrations en partant de la conclusion. Au contraire, cela pourrait peut-être permettre de mieux prendre conscience des risques d'erreurs.

Pour pouvoir être en mesure de rédiger comme on cherche, encore faut-il avoir vraiment cherché soi-même le problème dont on va exposer une démonstration. Or, dans notre enseignement, surtout après un certain nombre d'années d'expérience, on est assez rarement en réelle situation de recherche, en tout cas pour les problèmes que nous posons à nos élèves. Il convient d'en avoir conscience. Peut-être faudrait-il alors être bien plus attentif à la manière de chercher des élèves (et pas seulement au contenu des devoirs qu'ils remettent) afin de mieux rendre compte de leurs comportements face aux problèmes qu'ils doivent résoudre.

On peut se demander pourquoi, même ceux qui cherchent en partant de la conclusion, préfèrent rédiger en partant des hypothèses. Il y a certainement des raisons assez profondes autres qu'un simple souci de clarté ou de rigueur ; par exemple, le désir plus ou moins conscient, et la fierté d'atteindre un but par ses propres moyens, sans rapprocher le but.

D'ailleurs on peut peut-être expliquer ainsi le fait que, pour démontrer une égalité de la forme A = B, on a très souvent tendance à partir d'un membre (de préférence, celui de gauche) pour arriver à l'autre(*) . Dans ce cas, cette manière de faire est peut-être liée aussi à notre habitude d'écrire, toujours dans le même sens, de gauche à droite. Ne serait-il pas opportun de signaler que dans ce genre de problème on peut aussi partir de la conclusion (en écrivant par exemple que $A = B \Leftrightarrow A - B = 0$) ou encore transformer à la fois A et B de manière à obtenir A = C et B = C, en d'autres termes faire faire "un bout de chemin" à chacun des deux membres de l'égalité. Certains collègues déconseillent vivement cette manière de faire, pour des raisons de "clarté" ici aussi semble-t-il ; d'autres vont même jusqu'à sanctionner dans certains cas une telle manière de faire. Un collègue à qui je demandais s'il lui arrivait, en cours, de procéder ainsi (arriver à A = C et repartir de B) me répondit : *"Si tu fais ça devant tes élèves, ils te prennent pour un pantin et se disent que tu ne sais pas où tu vas"*.

Effectivement, je me suis trouvé un jour bloqué en partant d'un membre (il s'agissait de la démonstration d'une égalité entre fonctions hyperboliques) ; je suis alors carrément parti de l'autre membre pour m'en sortir. Les 25 ingénieurs de pays étrangers (du centre FIAS de Toulouse) à qui je faisais cours m'ont regardé d'un drôle d'œil. Certains d'entre eux pensaient même que ma démonstration était incorrecte. On peut remarquer que dans ce cas, que l'on parte de A jusqu'à B, de B jusqu'à A, ou que l'on parte successivement des deux, on ne fait pas une démonstration en partant de la conclusion ; il n'est donc pas question de confusion entre condition nécessaire et condition suffisante.

(*) Dans un livre de 1ère S, on démontre la propriété

$\forall \alpha \in \mathbf{R},\ 1 + \sin\alpha = (\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2})^2$

en commençant ainsi :

"On peut écrire $1 + \sin a = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\ \cos\frac{\alpha}{2}$ ..."

Ne serait-il pas plus simple de développer le second membre plutôt que de remarquer que 1 peut s'écrire $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$?

En conclusion, il me semble qu'il conviendrait d'essayer de modifier nos habitudes ; d'une part en rédigeant les démonstrations de manière la plus naturelle possible, donc en partant de la conclusion lorsque c'est plus simple ; d'autre part en conseillant très fortement à nos élèves d'essayer de partir de la conclusion lorsqu'ils sont bloqués en partant des hypothèses et en leur demandant de rédiger leur démonstration d'une manière à la fois claire et proche du cheminement de leur recherche.

On devrait aussi, me semble-t-il, procéder ainsi dans nos cours pour établir certains théorèmes dont la démonstration, longue, nécessite plusieurs étapes qui font souvent l'objet de lemmes : ne serait-ils pas préférable de justifier, quand c'est possible (ça l'est souvent), l'introduction de ces lemmes en partant du résultat à démontrer, plutôt que les "parachuter" dès le départ les uns à la suite des autres. En procédant ainsi, on prive souvent les élèves d'une occasion d'analyser certaines méthodes de résolution de problèmes et on dissimule les difficultés éventuelles de la démonstration.

On peut poser pour terminer le problème de fond suivant : Accorde-t-on une place assez importante à la phase de recherche dans notre enseignement ? Explique-t-on suffisamment comment on a pu trouver une solution? Insiste-t-on sur l'apprentissage de méthodes de résolution? Je ne le pense pas. Peut-être par manque de temps et surtout par tradition ; une tradition selon laquelle un enseignement de Mathématiques doit être quelque chose de propre, et doit donner l'impression d'un enchaînement parfait de propriétés qui se déduisent les unes des autres. Or ceci ne traduit pas du tout la réalité de l'activité mathématique : quand on cherche vraiment, il n'en est pas ainsi ; les étapes ne sont pas aussi clairement ordonnées.

[1] A.ANTIBI , 1983, *"Mathématiques et prestidigitation"* Bulletin n°339.

[2] G.POLYA, 1958, *"Les mathématiques et le raisonnement plausible"* Paris, Gauthiers-Villars.

[3] G.POLYA, 1965, *"Comment poser et résoudre un problème"* Paris, Dunod (2ème édition).