*En hommage à ...*

# Vers la quantification

**Jean-Maurice Chevallier**

*La "quantification", si elle reste inhérente à notre langage parlé, n'est plus la préoccupation majeure des mathématiques qui s'enseignent au lucée aujourd'hui.*

*Nous retrouverons néammoins avec plaisir dans cet article l'aisance, la verve et la pertinence de notre ami J.-M.CHEVALLIER, qui nous a quitté récemment, et dont voici un des derniers écrits.*

*Merci Jean-Maurice !*

## "Et les mots pour le dire arrivent aisément" (?)

A la suite d'une vaccination collective, une des trois informations suivantes a été rendue publique :

A : tous les sujets ont eu une réaction positive

B : aucun sujet n'a eu de réaction positive

C : une réaction positive a pu être observée.

Il va de soi que les informations A et B supposent un contrôle médical portant sur l'ensemble des sujets vaccinés, tandis que l'information C peut résulter d'un contrôle partiel. Cependant cette information C suffit pour infirmer l'information B, laquelle, évidemment, infirme C. Quant à A, elle entraîne C sans être entraînée par elle.

Tout cela peut paraître banal : on n'a pas attendu la création de la logique mathématique pour exprimer des choses de ce genre à l'aide des langues naturelles. Un point un peu inquiétant toutefois est que non seulement les moyens d'expression varient selon la langue (ce qui est normal), mais ils se correspondent mal ou parfois se contredisent d'une langue à l'autre.

Cependant notre intention n'est pas de faire de la linguistique comparée, mais seulement de voir comment la langue française permet de faire passer l'information, par exemple d'un enseignant à ses élèves. Or, on constate que, même dans ce domaine restreint, le point d'interrogation qui suit le titre de ce paragraphe n'est pas tout à fait injustifié.

## Quantification existentielle.

Le cas le plus simple est sans doute celui de C, peut-être parce qu'il est plus vague. Il s'agit d'affirmer l'existence au sein d'un ensemble, d'éléments qui jouissent d'une certaine propriété, sans qu'on puisse ou veuille affirmer que tous les éléments de cet ensemble la possèdent. On dispose alors d'articles, pronoms ou adjectifs indéfinis comme *des, certain(s), quelque(s), quelque chose, quelque(s) un(s), les uns, d'autres, beaucoup, un peu,...* pour traduire assez commodément l'idée à exprimer. Ces mots comportent en général une connotation restrictive, néammoins, ils paraissent utilisables à un niveau élémentaire pour éclairer le passage vers un langage plus technique.

A première vue, l'article indéfini *un* devrait être tout à fait adéquat. Mais la critique de *un* n'est plus à faire : à cause de son rôle numéral, on ne sait jamais si on affirme l'existence d'un élément unique ou celle d'un élément mal déterminé parmi d'autres ; de plus, nous retrouverons *un* plus loin avec encore un sens différent. Cependant, de façon un peu paradoxale, c'est cet aspect numéral qui sauve *un* grâce à la locution *au moins un*.

"Et s'il n'en reste qu'un, je serai celui-là" disait Victor HUGO pour affirmer que l'ensemble des opposants au Second Empire ne saurait être vide ; or, on remarquera que cet *un* est le quatrième terme d'une suite géométrique de raison 1/10 ("S'il n'en reste que mille" etc) laissant la porte ouverte à une extension que rien ne limite *a priori*. Ne cherchons pas ailleurs pourquoi des expressions comme "il y a au moins un ... qui ..." ou "il existe au moins un ... tel que ..." fleurissent dans notre enseignement : proches de la langue courante, et bien adaptées à leur objet, il n'est pas mauvais d'habituer de bonne heure les enfants à les utiliser.

## Quantification universelle.

La situation évoquée par A au premier paragraphe se présente sous un jour moins favorable. Ce n'est pas qu'on manque de mots collectivisants, c'est plutôt qu'on en a trop et qu'on a peine à les distinguer des mots ordinaires. Pratiquement n'importe quel article, adjectif ou pronom, défini ou indéfini, singulier ou pluriel, peut cacher, suivant les circonstances, l'idée qu'un élément "décrit" un ensemble, et cela paraît tellement naturel qu'on trouverait presque ridicule de le préciser ; quand on dit "le chat miaule" sans qu'il y ait de matou à proximité, il ne vient à l'esprit de personne de demander "Quel chat ?", tant il paraît évident que cela concerne tous les représentants de l'espèce. Et nous-mêmes, ne parlons-nous pas de la géométrie *du* triangle?

Inévitablement, le mot *un* resurgit ici. En disant "Un sot savant est un sot plus sot qu'un sot ignorant", Molière a quantifié, et plutôt deux fois qu'une, le respectable ensemble des sots. Souvent même, c'est l'absence de tout mot collectivisant qui exprime la généralité ; cela est particulièrement sensible dans le style sentencieux des adages et proverbes :

"A qui venge son père il n'est rien d'impossible"
"A beau mentir qui vient de loin"
"N'aime sa bête qui ne l'étrille" (version normande de "qui aime bien châtie bien")
"A bon entendeur salut"

et, avec quantification multiple :

"A bon chat bon rat"
"Tel père, tel fils".

Certes nous disposons de mots ou locutions qui permettent de traduire plus précisément la quantification universelle : *les*(qu'on éprouve parfois le besoin de renforcer en *tous les*), *chaque*, *chacun*, *tout*, *tous* et leurs composés adverbiaux *toujours*, *partout*, ou encore *n'importe quel*, *quel que soit*,etc. Mais ne nous arrive-t-il pas nous aussi de les sous-entendre? Il est assurément fastidieux de répéter en toute occurrence "pour tout $a$ et pour tout $b$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$" c'est pourtant le seul moyen de distinguer cette égalité "toujours vraie" (autrefois dite "identité") d'une égalité (ou "équation") comme "$x^2 + 1 = 3x - 1$" qui est vraie ou fausse suivant la valeur qu'on attribue à $x$.

Encore nos péchés par omission sont-ils les plus véniels ; car nous ne reculons pas devant l'antinomie. Lorsqu'une question comporte une quantification multiple, nous essayons d'étager celle-ci sur plusieurs niveaux, en "prenant" ou en "fixant" certaines variables, au moins de façon provisoire : "Par un point donné, menons ..." signifie en clair que le point n'est pas donné du tout ; de même nous disons : "Soit *D* une droite quelconque" alors que *D* a cessé d'être quelconque au moment même où nous la traçons. Ces difficultés, inévitables, sont inhérentes à la notion de variable ; mais cela ne fait que déplacer le problème.

## Quantification et négation.

La négation, lorsqu'elle interfère avec la quantification, ne manque pas de semer d'autres chausse-trapes. On ne peut que s'inquiéter de la dérive actuelle de la langue ; de plus en plus souvent sont employées des tournures comme "Tous les dossiers en retard ne seront pas acceptés" - et cela jusque dans les textes administratifs (universitaires de surcroît) qui devraient donner l'exemple de la clarté et de la rigueur. Devant cette situation, il n'est pas inutile de rappeler que la première tournure est existentielle (il y a des dossiers qui risquent de ne pas être acceptés), tandis que *aucun* induit une quantification universelle sur une proposition négative (cf le B du premier paragraphe) - ou, ce qui revient au même, nie une quantifcation existentielle (il n'y a pas un seul dossier qui sera accepté). La Fontaine et Vigny faisaient la différence, eux, quand ils écrivaient, le premier :

> "Ils ne mourraient pas tous, mais tous étaient frappés"

et le second :

> "Tous les preux étaient morts, mais aucun n'avait fui".

La négation offre assez de traquenards pour qu'on s'abstienne d'en rajouter par un mauvais usage de la langue. La quasi-totalité des mots réputés négatifs n'avait pas, en français, ce caractère à l'origine, et cela a laissé des traces telles qu'on ne sait jamais où commence la "double" négation : *jamais rien*, c'est le négatif universel "rien" ; *pas rien*, c'est l'existentiel "quelque chose" ; *il n'est rien qui ne* ..., c'est l'universel "tout". Inutile de souligner que toute cascade de négations, véritables ou postiches, apparentes ou camouflées, accroît le risque de dire le contraire de ce que l'on pense, "vous n'êtes pas sans l'ignorer", n'est-ce pas?

## Les quantificateurs.

Devant pareil imbroglio -médiocrement logique, avouons-le - on peut être tenté de dire : tout cela regarde nos collègues littéraires ou linguistes et ne nous concerne, à la rigueur, que dans le cadre d'une concertation pluridisciplinaire, quand elle existe ; nous, qui pour notre usage propre disposons des quantificateurs, pouvons dédaigner ce genre d'obstacles.

Cette attitude présomptueuse ne résiste pas à l'examen. Faire passer un message mathématique sans le secours de mots quotidiens, personne ne s'y risquerait, à quelque niveau que ce soit ; au niveau élémentaire, ce serait prendre les choses à l'envers. Une fois un concept acquis, il peut être fructueux de le traduire et de le fixer grâce à un symbolisme approprié, mais il est utopique d'espérer que le parachutage prématuré d'un symbolisme, fût-il excellent, permettra l'acquisition d'un concept.

La seule vraie question est de savoir à quel stade l'introduction des quantificateurs devient plus utile qu'inopérante ou néfaste. A notre avis, leur place n'est pas au Collège, mais nous ne saurions imposer cette opinion. Par contre nous ne craignons pas d'être catégoriques sur ce qu'il faut éviter à tout prix. Justement parce que les symboles logiques doivent avoir une syntaxe et une sémantique très strictes, on n'a pas le droit de laisser naître ou s'implanter chez les élèves des habitudes d'expression fausses ou même floues. Il n'est pas question de quantifier sans un respect scrupuleux des impératifs suivants.

1°- Pas plus que les autres symboles mathématiques, ni $\forall$ ni $\exists$ ne doivent être employés comme signes sténographiques : ce ne sont pas des substituts de "quel que soit" et "il existe".

2°- Correctement employés dans une phrase mathématique, "$\forall x$" se lit effectivement "quel que soit $x$" ou "pour tout $x$". Mais interpréter "$\exists x$" comme "il existe un $x$" laisse croire que "$\exists x$" est une phrase : c'est l'origine d'écriture comme "$\exists x$ tel que" ou "$\exists x$ t.q." qu'on a rencontrées, même sous des plumes autorisées et qui n'ont pas entièrement disparu. A lui seul "$\exists x$" signifie "il existe au moins un $x$ tel que" ou "pour au moins un $x$", ce qui rend caduques les écritures précédentes.

3°- De même, après avoir connu une certaine vogue, les écritures "$\exists ?x$" et "$\exists x$ ?" sont heureusement en voie de disparition ; gardons-nous de les réanimer.

4°- Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont mutifiants : ils doivent être suivis d'une *lettre unique*, ce qui interdit absolument des écritures comme "$\forall f(x)$" ; en principe cette lettre se retrouve dans la suite de la phrase mathématique, par exemple :

(1) $\quad \forall x \quad (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

(cette lettre est "muette" en ce sens qu'elle peut être remplacée en toutes ses occurrences sans que le sens de la phrase s'en trouve modifié).

5°- Certains pensent encore quil est indifférent d'écrire la phrase précédente sous la forme :

(2) $\quad (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \quad \forall x$ .

Naturellement cette convention-là aurait pu être adoptée ; mais, à présent elle est devenue dangereuse, du fait que la convention unique, on ne sait comment interpréter l'ordre dans lequel les quantificateurs sont écrits ; or cet ordre n'est pas sans importance : Ecrire dans **R**

(3) $\forall x \quad \exists y \qquad x + y = 0$

signifie que tout réel a un opposé ; si on a le malheur d'écrire

(4) $\exists x \quad \forall y \qquad x + y = 0$

on affirme par là qu'il existe un réel qui est opposé à tous les autres!

6°- On n'oubliera pas que, lorsqu'on passe à la négation, les symboles $\forall$ et $\exists$ s'échangent (c'est l'oubli de cette règle qui est à l'origine de la phrase mal bâtie "tous les dossiers en retard ne seront pas acceptés"). Ainsi la négation de (1) est la phrase évidemment fausse :

$$\exists x \quad (x - 3)^2 \neq x^2 - 6x + 9$$

et la négation de (4) est la phrase évidemment vraie :

$$\forall x \quad \exists y \qquad x + y \neq 0.$$

7°- En dérogation à 4°, on rencontre des écritures comme "$\forall x \in \mathbf{R}$", "$\exists(x,y)$", etc. Bien que discutables, elles sont trop répandues pour qu'on les condamne sans nuances. Mais il est sage de s'en abstenir avec des débutants : si l'on veut dire "pour tout $x$ réel", il est bien simple d'écrire "$\forall_{\mathbf{R}} x$" et il n'est pas très long de remplacer "$\exists(x,y)$" par "$\exists x$ , $\exists y$".

Répétons-le, ces quelques règles mettent à l'abri d'erreurs graves, elles ne permettent pas d'esquiver les problèmes évoqués plus haut. Quelle que soit notre spécialité, nous ne pouvons que louvoyer à vue entre des écueils également perfides : employer un vocabulaire grevé de sous-entendus qui le rendent ambigu, ou le surchargent de gloses qui le rendent opaque. A tout instant, nous risquons l'incompréhension par la faute d'un mot ou d'une tournure qui auront piégé nos élèves, nous-mêmes ou les deux. Plutôt que de l'ignorer ou de faire semblant, il vaut mieux en être conscients.