

En hommage à ...

Hans FREUDENTHAL (1905-1990)

Josette Adda

Professeur à l'Université
Lumière-Lyon 2.



Hans FREUDENTHAL naquit le 17 septembre 1905 à Luckenwald en Allemagne. Il prit sa retraite de l'Université d'Utrecht en 1975 ; le "feestbook" de son jubilé (septembre 1975) comportait une liste de publications de 380 titres. Mais il n'a pas arrêté de travailler, il a continué à réfléchir et à écrire. Il est décédé le 13 octobre 1990, une semaine après avoir relu les épreuves de son dernier livre qui paraîtra en 1991 (Editions Kluwer).

Il avait soutenu sa thèse de doctorat en mathématiques à l'Université de Berlin en 1930 ("*Über die Enden topologischer Räume und Gruppen*") et son habilitation au titre de "privadocent" à l'Université d'Amsterdam en 1931 ("*Qualität und Quantität in der Mathematik*"). Il fut assistant de Brouwer et, bien plus tard, il fera sur ses travaux des recherches historiques qu'il nous racontera lors d'une conférence à Paris ("*L'origine de la topologie moderne d'après des papiers inédits de L.E.J.BROUWER*" - publication DD3 de l'UER de Didactique des Disciplines de Paris 7) :

J'avais presque achevé le manuscrit de l'œuvre topologique de Brouwer quand, à la recherche d'échantillons de l'écriture de Brouwer qui se prêteraient à la reproduction, il me survint qu'un cahier tombant à terre lâcha quelques pages détachées que j'identifiai immédiatement comme des brouillons de lettres à Hilbert et Hadamard.

...

D'après ce brouillon, Brouwer passait les vacances de Noël de 1909-1910 chez son frère, le géologue, 6, rue de l'Abbé de l'Épée, au Quartier Latin de Paris. Voilà donc le berceau de la topologie moderne dont la naissance fut annoncée Nouvel An 1910. En effet, ces brouillons contiennent la majorité de ce qui est essentiel dans l'œuvre de Brouwer telle qu'elle sera publiée en 1911-1913 ; les classes d'homotopie, et le degré d'application (quoiqu'il soit obtenu avec des approximations polynomiales au lieu de simpliciales), les applications de sphères et les champs de vecteurs sphériques dans leur réciprocity, des théorèmes sur les points invariants et les singularités des champs de vecteurs basés sur le concept de degré d'application.

La liste des titres de publications de H.FREUDENTHAL est impressionnante, d'abord par la variété des langues utilisées (allemand, hollandais, anglais, français) et, surtout, par l'importance et la variété des thèmes : dès le début algèbre, topologie, statistiques, logique. Je citerai seulement quelques exemples : *La structure des groupes à deux bouts et des groupes triplement transitifs* (1951) - (cf à ce sujet l'hommage ci-joint de notre collègue E.Kosmanek), *"Gambling with a poor chance of gain"* (1952), *"La topologie dans les fondements de la géométrie"*, Proc.Int.Congress Math 1954 et les livres *"Logique mathématique appliquée"*, Gauthier-Villars, 1958, *"The language of logic"*, Elsevier, 1966, *"Probability and statistics"*, Elsevier, 1965, mais aussi les articles *"Is there a specific problem of application for probability ?"* in Mind, 1941, *"Machines pensantes"* - conférence du Palais de la Découverte, 1953, *"Relations entre l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire en Hollande"* in Enseignement mathématique, 1956, *"Ist die mathematische Statistik Paradox ?"* in Dialectica 12-1958, *"Sur la responsabilité humaine du mathématicien"* in Mathematica & Pædagogia, 1957-58, *"Abus philosophiques de la statistique"* in Revue de Métaphysique et de Morale, 1962, *"Les faits et gestes de l'âne de Buridan"*, XII^e Congrès International d'Histoire des Sciences, Paris 1968, *"Notations mathématiques"* in Encyclopædia Universalis, 1972 et le livre si étonnant, malheureusement épuisé : *"LINCO, design of a language for cosmic intercourse"*, Amsterdam, 1960. Cet homme qui allait jusqu'à imaginer de communiquer avec des êtres d'autres planètes, était toujours à l'écoute de tous ses semblables, d'un humanisme exceptionnel, attentif à tous les problèmes

sociaux (à 83 ans, il fit une longue visite en Chine qui le passionna malgré la fatigue physique), c'est ainsi que, très naturellement, il se mit à s'intéresser de plus en plus aux problèmes éducatifs. Il m'a souvent dit qu'il avait déjà cette passion lorsqu'il était jeune assistant de mathématiques et avait organisé alors un séminaire sur l'enseignement.

Il fut membre du Comité exécutif de la Commission Internationale pour l'Enseignement des Mathématiques (ICMI) de 1963 à 1974 et son président de 1967 à 1970. Il fut l'un des plus actifs participants de toutes les rencontres internationales sur l'enseignement des mathématiques (notamment de la CIEAEM^(*)) dont il fut aussi président et de PME^(**) qu'il contribua à fonder). Il écrivit énormément d'articles sur ces sujets et trois livres d'une importance exceptionnelle (chez Reidel) : *"Mathematics as an educational task"* (1973), *"Weeding and Sowing - Préface to a Science of Mathematical Education"* (1978), *"Didactical phenomenology of mathematical structures"* (1983) ainsi que l'ouvrage qui va paraître cette année.

Mais son œuvre n'est pas seulement constituée de pages écrites et d'idées, c'est aussi (car c'était aussi un homme d'action) la création de IOWO (Institut de recherches et développement sur l'enseignement des mathématiques à Utrecht), qu'il vécut vraiment comme un "enfantement", dans lequel il s'engagea avec passion, qu'il craignit plusieurs fois de voir disparaître et qui s'est perpétué désormais sous le nom de OW&OC. Au plan international, il a fondé la revue *Educational Studies in Mathematics* en 1968, s'est dépensé sans compter pour son développement et, une fois l'audience et la valeur scientifique assurées, il a passé le relais de la direction à A.Bishop en 1979.

Il n'appréciait pas du tout ce qu'il appelait "arm-chair pedagogy", la didactique en fauteuil ou en bibliothèque. Pour lui et pour ses disciples, il n'y a pas de didactique sans élèves : il aimait à dire qu'il apprenait énormément sur les mathématiques lorsqu'il se trouvait dans une classe élémentaire. Lorsqu'il fut notre invité au Congrès APMEP de Lille (1983), sur "l'échec mathématique", il nous fit une merveilleuse conférence dont je veux extraire quelques citations :

(*) Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques

(**) PME : Psychology of Math education

L'échec des coureurs

L'échec, c'est relatif. Si l'on se poste pour une course et que l'on n'est pas même classé, c'est un échec. C'est l'échec des coureurs, des coureurs à pied, à bicyclette, à cheval, en automobile, des patineurs, des boxeurs. Mais personne ne vous demande de courir, même à une vitesse modérée, de monter à bicyclette, à cheval, en automobile, de patiner, de boxer, même pas de jouer aux échecs, où les échecs peuvent être bien spécifiques. Qu'ils se plaignent de leurs échecs, cela ne me touche guère. C'est bien leur faute à eux s'ils échouent.

Les mathématiques, c'est autre chose. Il n'y a pas de choix. Apprendre les mathématiques, apprendre à lire, à écrire, c'est obligatoire.

...
Voilà ce que j'ai l'habitude d'appeler le gros mensonge de notre système d'enseignement - et j'ai peur qu'il ne caractérise bien d'autres systèmes : l'abîme qui s'ouvre entre les demandes exagérées et le niveau bas de performance qui suffit pour être admis. Un gros mensonge qui n'est qu'un des aspects des fonctions sociales de notre système d'enseignement - je parle de chez nous en tant que paradigme. Des examens sont un outil de sélection : d'identifier ceux qui peuvent satisfaire aux demandes les plus excessives. Mais pourquoi la grande majorité serait-elle obligée de tendre à infiniment plus qu'ils peuvent atteindre ? A mon avis, apprendre des mathématiques simples à un niveau élevé d'entendement vaut mieux qu'enseigner des mathématiques raffinées qui s'apprennent à un niveau bas au-dessous de chaque niveau possible.

...
Je n'aspire pas à changer la société, mais malgré les désillusions que j'ai éprouvées, je crois toujours qu'on peut changer peu à peu l'enseignement : au lieu de course avec l'échec inévitable des coureurs, la promenade où la modération de la marche est récompensée par l'attention pour l'entourage et ses détails qui échappent à celle des coureurs - excusez cette abondance de métaphores, mais n'oubliez pas que le langage métaphorique a déjà commencé avec "la lutte contre l'échec".

Les promenades en groupe ont l'avantage qu'on s'amuse en apprenant l'un de l'autre. J'ai fait une telle promenade pendant presque trois années. Ma compagne était une fille de près de chez nous. Je lui ai donné des leçons, à une moyenne de deux fois par semaine, une demi-heure ou un petit peu plus. Ce fut dans sa sixième année scolaire, la dernière de notre enseignement primaire que cela commença.

Elle était d'une intelligence normale, mais extrêmement faible en arithmétique à l'école.

Ce qu'il ne dit pas, c'est qu'il s'agissait d'une petite fille extrêmement défavorisée socialement et immigrée depuis peu du Surinam aux Pays-Bas. Il nous "montra" (brouillons à l'appui) chez cette enfant une évolution que l'on pourrait trouver fascinante et pourtant, il garda la modestie et la lucidité du scientifique :

Je vous ai avertis : la leçon de cette suite de leçons n'est pas grand'chose. C'est une source de questions plutôt que de réponses, mais -nous l'espérons- de questions qui valent la peine d'être posées. Des questions de méthode et de matière à enseigner. De méthode -c'est évident : l'organisation, si elle est possible, d'un enseignement qui approche celui que j'ai eu la bonne chance de donner à cette fille. Mais n'oublions pas la matière à enseigner. Quel est le sens de cet enseignement de fractions, de nombres négatifs, d'équations linéaires, de puissance, d'algèbre, pour une fille qui ne sera jamais appelée à appliquer cette matière ? On s'est amusés, le maître et l'élève. Peut-être a-t-elle gagné plus de confiance en elle-même. Ce seraient des résultats positifs, mais cela ne suffit pas. C'est évident que tout le monde ne peut pas apprendre les mêmes choses, mais l'algèbre, doit-elle être abordée par tout le monde ? Et puis, quelle espèce d'algèbre, quelle quantité, quelle profondeur ? Evidemment l'algèbre ne vaut pas une course, mais vaut-elle une promenade ?-

...
Si je n'aime pas l'enseignement en pleine classe dirigé par le maître, je me méfie de l'enseignement dit individualisé qui, nonobstant des résultats douteux, est toujours à la mode -au moins chez nous- et dont la menace sera renforcée au futur par l'intervention de l'ordinateur. C'est la promenade seul à seul transformée en une course, qui produit de nouveau des foules de décrocheurs.

J'aime plutôt les petits groupes -même et par préférence hétérogènes- de travail, la différenciation non par rapport à la matière à enseigner et à la vitesse d'apprentissage, mais par rapport à la profondeur de l'entendement des participants.

Il resta toujours ferme sur cette position en faveur des classes hétérogènes : sa disciple Rijkje DEKKER fait des recherches didactiques sur l'organisation de groupes de travail hétérogènes et son épouse était une fervente militante du mouvement pédagogique dit de "l'école d'Iena", école dont les classes mêlent des enfants d'âges différents, comme dans les familles.

Il est regrettable qu'on ne possède pas de traduction en français ou en anglais du récit de ses "*promenades avec Bastien*" où il rapporta, jour après jour, l'aventure intellectuelle de ses promenades quotidiennes avec son petit-fils bébé, et jusqu'à sa scolarisation. Il en citait souvent des anecdotes qui lui ont servi comme contre-exemples à la théorie de Piaget en mettant en lumière les potentialités réelles des enfants en situations naturelles (i.e. non "expérimentales" comme celles de Piaget et de son école).

Dans son allocution au premier Congrès International de l'Enseignement des Mathématiques à Lyon en 1969, il soulignait déjà l'opposition qui lui sera chère entre "mathématiques toutes faites" et "mathématiques à faire" :

Les mathématiques sont plus qu'une technique. Apprendre les mathématiques, c'est acquérir une attitude de comportement mathématique ... Les mathématiques n'ont pas à être enseignées pour s'adapter à une minorité mais pour tous et ils doivent apprendre non seulement des mathématiques mais aussi quoi faire avec des mathématiques. Ceci ne signifie pas enseigner des mathématiques appliquées mais plutôt créer une attitude, l'attitude de découvrir des mathématiques partout où elles se trouvent.

Aux cérémonies de son Jubilé (août 1976), interrogé sur ce que serait, selon lui, l'enseignement des mathématiques en l'an 2000, il répondait "*La réponse est toute simple. Il n'existera pas, il aura disparu. Il n'y aura pas de matière d'enseignement appelée "mathématiques", il n'y aura pas de leçons de mathématiques sur l'emploi du temps et il n'y aura pas de manuel de mathématiques*".

Il essayait de promouvoir dans les recherches de IOWO puis de OW&OC un enseignement intégré, une formation transdisciplinaire mais il ne voulut jamais abuser de son autorité pour forcer l'évolution de ces institutions. Il me parla longuement déjà en 1971 de son horreur de la "gérontocratie" et de son désir de laisser ses jeunes collègues travailler librement (éventuellement en faisant des erreurs), il expliquait qu'il préférerait être le "grand-père" plutôt que le "père", et ne donner des conseils que si on insistait pour lui en demander.

Voilà l'un des traits de caractère de H.FREUDENTHAL qu'il est essentiel d'évoquer pour comprendre sa personnalité et son œuvre : son sens des responsabilités. Dans "*Weeding and Sowing*", il insiste sur la différence entre "*accountability*" et "*accountancy*" (ce que je pense pouvoir traduire à peu près par "rendre compte" et "rendre des comptes"). D'ailleurs, le titre même de "*Weeding and Sowing*" ne signifie-t-il pas "arracher des mauvaises herbes et

semer" ? G.HOWSON dira, lors de la cérémonie pour les 80 ans de H.FREUDENTHAL (septembre 1985) :

We must all have our favourite Freudenthal stories - those simple, deflating remarks that drive a sworpoint though windbags. I recall an English reviewer who compared him with Don Quixote : one who never missed the opportunity to go out of his way to tilt at a windmill. I don't think the comparison was entirely apt, but I can see the reviewer's point - and I rejoice that Freudenthal should have so often yielded to the temptation.

Of course, it is safer to stick to well-worn generalities, but Freudenthal has rarely opted for safety and appeasement. Indeed it is this which brings me to the third point which I wish to mention and where I believe Freudenthal has made a unique contribution to mathematics education ; that is the time he has devoted to the criticism of the work of others.

A remarkable feature of the 1960's and 1970's was the number of mathematics educators who produced a variety of schemes, ideas, texts, etc. and who did so without any apparent recognition that others were doing so too and that there were remarkable differences in assumptions, goals and attempted solutions. In general there was an air of 'dog does not eat dog' - one educator did not criticise another, and everyone went on with his own work largely oblivious of the others. This was an atmosphere conducive to laying the foundations of a discipline. One definition of 'discipline' given in my dictionary is 'training through correction and suffering'. Often in the 1960's and 1970's it was the children who suffered because of the lack of correction so far as the mathematics educators were concerned. Serious, detailed criticism is not easily carried out, and it takes one away from those activities which more readily gain general esteem. Freudenthal's biting criticism of the way in which much empirical research work in mathematics education is carried out and, more importantly, reported and quoted (Freudenthal, 1979a), must have taken hours and hours of work which in itself carried little personal reward of satisfaction. Yet that work had to be done in order to assemble a strong case against the system - a case presented by means of an argument which justified the word 'discipline'. Another example is the 1975 paper 'Pupil Achievements Internationally Compared', a sixty page critique of the First International Study on Mathematical Attainment. Such critical work is, as I remarked earlier, unfashionable and certainly it is not guaranteed to make one many new friends, but without it there is no chance that we shall ever attain to that science

of mathematics education which Freudenthal's Weeding and Sowing (1978a) sought to preface.

Il osa s'attaquer aux deux grands du moment (Bourbaki et Piaget) par cet exercice :

THE NUMBER CONCEPT-OBJECTIVE ACCESSES

His mathematics stemmed from Piaget, and his developmental psychology from Bourbaki. He did not like complete induction so he preferred complete intimidation.

From the biography of a didactician.

à l'un des chapitres de "Mathematics as an educational task", dont l'appendice mettait en pièces "*Piaget and the Piaget school's investigations on the development of mathematical notions*".

Il dénonça les abus de l'utilisation des statistiques :

According to a well-worn joke there are three kinds of lies : lies, damned lies, and statistics. When the joke was invented, mathematical statistics has not yet come into being. Otherwise one would have added three kinds of surreptitious credibility : by word of honour, by oath, and by mathematical statistics. Or, three methods to assume a learned air : footnotes, bibliography and correlation tables.

Il fut féroce avec la première enquête de l'IEA et se fit aussi beaucoup d'ennemis en s'attaquant à la "taxonomie" de Bloom :

How could all this develop and never be resisted ? How to explain the tremendous success of the Taxonomy ? How the fashion of instructional objectives, the rage of atomization, the cult of packaging, the rituals ? How could educationists who have nothing to offer but empty boxes and slogans get settled in the educational systems, first in the United States, but in an increasing density in Europe too ? Empty vessels make the most noise according to a proverb.

à la "pédagogie par objectifs" et aux modes ("mastery learning", etc...). Il s'attacha à faire connaître les travaux de KAMIN ("*The science and politics of IQ*") dénonçant ainsi les publications de BURT sur les soi-disant proportions (80/20 !) d'inné et d'acquis.

Vis-à-vis de la "Réforme des mathématiques modernes" (cf son article dès 1963 : "*Enseignement des mathématiques modernes ou Enseignement*

moderne des mathématiques" in L'enseignement mathématique), il garda toujours le regret de ne pas s'être rendu au fameux Colloque de Royaumont en 1959. Sa position était très critique : il nous la rappela dans son débat avec Madame KRYGOWSKA sur "la réforme de l'enseignement des mathématiques" organisé par la Régionale parisienne de l'APMEP en Avril 1975 (publié par les "Chantiers mathématiques" de juin 1975).

F : Quelqu'un a parlé des erreurs. On peut le faire dans diverses perspectives. Il y a les petites erreurs des manuels, mais on peut aussi faire une réforme qui soit globalement une erreur. Et il ne faut pas objecter la réforme continue, parce qu'on peut continuer les erreurs! (rires).

Faire une réforme est une grande responsabilité, il faut la préparer sérieusement. On a parlé de points de vue différents, mais il y a aussi des points de vue faux, comme celui, en pédagogie, de partir de l'abstraction pour aller aux fausses concrétisations.

C'est aussi une erreur de penser qu'on peut faire une réforme sans préparer les maîtres. Cette erreur a été faite en France, et en Allemagne. Il faut une stratégie pour préparer les gens, maîtres et parents. Il faut employer des moyens modernes, comme la télévision.

D'ailleurs, à la rencontre CIEAM de Sherbrooke (1987) sur "le rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique", il choisit de parler de "Erreurs du professeur - Analyse didactique de soi-même" et déclara notamment :

Je prends mon début avec une erreur historiquement notable d'apprentissage mathématique, l'erreur du siècle, pour ainsi dire, qui, tout en faillant ruiner profondément l'enseignement mathématique, a néanmoins réussi à ébranler la croyance qu'on y mettait et à retarder son renouveau urgent. Vous comprendrez ce que j'ai en vue : la mathématique Bourbakiste parachutée à l'école, Royaumont 1959. Mais Royaumont n'en était pas le berceau. On peut suivre les traces de sa préhistoire et de ses conséquences même dans la longue série des entretiens de notre CIEAEM.

Cette erreur était-elle une erreur d'apprentissage ? Oui, une erreur d'apprentissage mathématique au sens que, pour la plupart des participants à de nombreuses réunions, cette mathématique fut une nouveauté mal comprise. Mais surtout, ce fut une erreur didactique du professeur-élève se soumettant aux ordres du professeur-professeur.

...

Même à cette époque-là, chaque didacticien des mathématiques ou même chaque mathématicien savait ou devait savoir que la déductivité,

loin d'être le point de départ, n'est que la fin élaborée de chaque activité mathématique, mais jamais, avant ou après, la didactique des mathématiques n'a été trahie en faveur d'un dogmatisme aussi despotique qu'à cette époque-là. Quels étaient les coupables de ce presque-assassinat de la didactique des mathématiques, de cette victoire remportée à Royaumont par les dogmatiques sur l'enseignement mathématique ?

Je pense qu'on peut dire qu'il est à l'origine de la reconnaissance et du développement institutionnel de la didactique des mathématiques en France, puisque c'est lui qui, un jour de 1975, m'a déclaré qu'à son avis les travaux que j'avais faits sur l'enseignement des mathématiques constituaient une thèse. ce qui, à cette époque, était inimaginable en France (aux Pays-Bas, il avait déjà depuis plusieurs années, fait soutenir à Van Hiele une thèse sur l'enseignement), mais l'autorité scientifique de H.FREUDENTHAL a été déterminante pour convaincre une commission de thèses de mathématiques en France de commencer à prendre en considération des travaux de ce type.

Parmi ceux qui ont travaillé sur l'enseignement des mathématiques, certains se sont opposés à lui (G.HOWSON raconte que FREUDENTHAL répondit un jour à DIEUDONNE : "*Don't shout at me, because I can shout as loudly as you and in more languages*"), mais tous ont dû reconnaître l'importance de sa pensée. Cette pensée ne périra pas puisque ("*Weeding and Sowing*"), il a arraché beaucoup de mauvaises herbes (pas toutes malheureusement) et il a beaucoup semé.