Un exemple d'utilisation des calculatrices graphiques au lycée *Introduction à la dérivation en classe de première.*

Marie-Luce Port

Lycée Fustel de Coulanges
Strasbourg

Ce T.P. a été expérimenté en classe de première S. De nombreux élèves de cette classe possédaient une calculatrice graphique. J'ai donc essayé d'utiliser ce nouvel outil dans mon cours.

Objectifs visés :

Le but de cette séance est d'introduire les notions de tangente et de nombre dérivé d'une fonction f en un point en cherchant une approximation affine de f au voisinage de ce point. La calculatrice est pour cela un outil précieux, car elle permet, rapidement et avec précision,
- d'afficher une courbe en choisissant le cadrage (touches GRAPH, RANGE)
- de faire des "loupes" successives autour d'un point fixe (touches PLOT, FACTOR)
- de joindre par un segment deux points de l'écran (touches PLOT, LINE)

- de lire les coordonnées de points du graphique (touches RANGE ou TRACE).

Les seuls prérequis mathématiques sont les équations de droites et la notion de limite d'une fonction en 0.

Déroulement du travail avec les élèves

Il s'est déroulé sur une séance de deux heures. Les élèves étaient répartis en 9 groupes de 3 ou 4, chaque groupe disposant de deux calculatrices et travaillant à son rythme pendant la première heure. Au début de la deuxième heure, nous avons fait le point et la synthèse du II)4. tous ensemble. Au bout des deux heures, presque tous les groupes en étaient arrivés au point 7. Les points 7 et 8 ont donc été donnés en exercices pour la séance suivante. Nous avons transcrit dans les cahiers la synthèse de cours et mis en place le formulaire de dérivation des fonctions usuelles à partir des exemples du 8.

Quelques commentaires

Les élèves, même les plus faibles, ont été très actifs et chacun a eu l'occasion de faire fonctionner la calculatrice. Le travail de groupe a permis d'effectuer les calculs un peu longs du II avec efficacité et sans lassitude.

Les élèves semblent avoir mieux perçu la notion de tangente et n'ont plus hésité, ni pour sa définition, ni pour son tracé. Petit revers : ils avaient si bien pris le pli du calcul de P(h) ou P(h)/h que le formulaire de dérivation a eu du mal à se faire une place dans les habitudes de certains élèves !.

Document élève

Objectifs: Etant donnée une courbe (C) d'équation $y = f(x)$ et un point $A(x_0, f(x_0))$ *de* (C), trouver, si c'est possible, une droite approchant "au mieux" (C) au voisinage de A, calculer son équation $y = ax + b$ et évaluer l'erreur commise en remplaçant, dans un calcul par exemple, $f(x)$ par $ax + b$ pour x proche de x_0.

Les outils dont vous disposez sont :

- la calculatrice (si nécessaire, demander la fiche-calculatrice)
- un outil mathématique : *on dit qu'une fonction P est négligeable devant h au voisinage de O si* $\lim_{h \to 0} P(h)/h = 0$

I - *Partie expérimentale*

(Pour les équations de droites, on prendra les coordonnées des points à 1/100 près).

ETAPE 1 — (C) est la courbe correspondant à $f(x) = x^2$ et A(1 , 1).
◊ Afficher (C) pour x dans [0,2]. Tracer la droite allant de A à l'un des points de (C) les plus éloignés de A sur l'écran. Cette droite est-elle une bonne approximation de (C) sur [0,2] ? Quelle est son équation ?
◊ Faire une "loupe" sur [0,5 ; 1,5] et refaire le même travail.
◊ Recommencer les loupes jusqu'à ce qu'à l'écran, on ne fasse plus la différence entre (C) et la droite.

ETAPE 2 — Refaire le même travail qu'à l'étape 1 en choisissant deux autres valeurs de x_0 (on pourra se contenter de calculer la dernière équation).

ETAPE 3 — Faire de même qu'à l'étape 1 avec $g(x) = 1/x$, $h(x) = \sqrt{x}$ et trouver l'équation de la droite qui vous semble approcher le mieux la courbe.

ETAPE 4 — Que se passe-t-il si on essaie de faire de même pour $l(x) = \sqrt{x - 1} + 1$ et $m(x) = |x - 1| + 1$?

II - *Justification des résultats*

1 . A l'étape 1, on trouve comme équation de droite $y = 2x - 1$. En posant $x = 1 + h$, calculer $P(h) = f(x) - (2x - 1)$ en fonction de h.
Montrer que $P(h)$ est négligeable devant h.
Ecrire $f(1 + h)$ en fonction de $f(1)$, h et $P(h)$.

2 . Refaire le même travail avec une autre droite passant par A. Le polynôme $Q(h)$ obtenu est-il encore négligeable devant h ?
Pour quelle valeur du coefficient directeur de la droite obtient-on une différence négligeable devant h ?
Quelle est la "meilleure" approximation affine de f au voisinage de 1 ?

3 . Refaire le même travail qu'en 1. mais avec les x_0 de l'étape 2.

4 . *Synthèse des résultats.*
* La meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0 s'appelle *fonction affine tangente en A à f* (quand elle existe !)
* Son coefficient directeur est le *nombre dérivé de f en x_0*.
* Sa représentation graphique est la *tangente en A à (C)*.

5 . Deviner, pour $f(x) = x^2$ et x_0 quelconque, la valeur du nombre dérivé de f en x_0. Démontrer.
La fonction $x_0 \rightarrow$ (nombre dérivé de f en x_0) s'appelle *fonction dérivée de f et se note f '*. Le nombre dérivé de f en x_0 se notera donc désormais $f'(x_0)$.

6 . Les fonctions de l'étape 4 sont-elles dérivables en 1 ? Toute courbe admet-elle partout des tangentes ?

7 . Démontrer le résultat deviné à l'étape 3 pour la fonction $g(x)$.

8 . Déterminer le nombre dérivé en 1 des fonctions suivantes et tracer les tangentes correspondantes : $n(x) = x^3$; $p(x) = x^2 + 2x - 1$; $q(x) = ax + b$.

Fiche calculatrice (pour CASIO)

Elle donne pour les élèves ne connaissant pas la machine, un exemple d'exécution de l'étape 1.

- Programmer le tracé graphique :
  <mode> 2 <prog> 0
  <graph> (formule en fonction de x)

- Initialisation du cadrage :
  <mode> 1
  <range> 0 <exe> 2 <exe> 0.1 <exe> 0 <exe> 4 <exe> 0.1 <exe>

- Afficher la première courbe :
  <prog> 0 <exe>

- Faire une loupe avec le facteur 2 :
  <plot> 1,1:<factor>2:<prog>0
  Le simple appui sur <exe> fera à chaque fois la loupe demandée, le graphique restant centré sur A(1,1).

- Tracer un segment [AM] :
  <plot> 1,1:<plot> 1,1<exe> <trace> (déplacer le point clignotant à l'aide
  des flèches jusqu'au point désiré) <line> <exe>.