Interdisciplinarité

Scalaires et vecteurs en Physique

Bernard DIU

Professeur de Physique
Université Paris VII

Bernard DIU, Professeur à l'Université de Paris VII est l'auteur de deux traités qui font autorité: *"Mécanique quantique"* (avec C.COHEN-TANNOUDJI et F.LALOE) et *"Physique statistique "* (avec C.GUTHMANN, D.LEDERER, B.ROULET).

La Société Mathématique de France a organisé en Novembre 1989, au C.I.R.M. de Marseille, un colloque sur l'enseignement des mathématiques dans les deux années suivant le baccalauréat. Les organisateurs m'avaient fait l'honneur de m'inviter, moi qui (ne) suis (que) physicien. Dans mes efforts un peu fébriles pour tenter de justifier cet honneur, j'ai émis des opinions fort probablement hérétiques sur la différence qui existerait entre les "vraies mathématiques" et les "mathématiques pour la physique". C'est sans doute la raison pour laquelle j'ai "écopé" de ce qu'on appelle, dans certains jeux de société, un "gage" : j'écrirais un article pour le Bulletin de l'A.P.M.E.P., sur l'un des exemples que j'avais moi-même imprudemment avancés.

Voici donc le "pensum" : comment un physicien "voit" les scalaires et les vecteurs (1).

---

(1) Les considérations qui suivent n'ont rien d'original. Elles font partie du bagage de tout physicien théoricien et sont probablement connues de beaucoup de

I - Invariance des lois physiques par translation et par rotation.

Les qualificatifs de "scalaires", "vectorielles" ou "tensorielles", appliqués à des *grandeurs physiques*, se réfèrent aux *propriétés de transformation* de ces grandeurs dans des changements d'axes de référence. Et l'importance des propriétés de transformation provient elle-même d'un caractère fondamental que doit posséder toute loi physique : *l'invariance* (on dit aussi "symétrie") dans de tels changements d'axes.

1 - L'espace de la physique "classique".

L'invariance des lois physiques est - comme toute affirmation ou hypothèse en physique - constamment (ou plutôt de temps à autre, lorsqu'un phénomène nouveau est découvert) confrontée à l'expérience à travers ses conséquences. Il est commode de la faire découler de *la structure même de l'espace*.

La physique "classique" (ce qui signifie ici "non relativiste") se déroule dans un espace euclidien à trois dimensions facilement accessible à notre intuition, puisque notre vie courante est, au moins superficiellement, régie par les lois physiques "classiques".(2)

L'espace classique est supposé *homogène et isotrope*. Qu'il soit homogène signifie que les propriétés et l'évolution d'un système physique quelconque seront les mêmes quelle que soit la localisation de ce système dans

---

mathématiciens, mais peut-être pas reconnues par ces derniers comme fondamentales. Elles sont très clairement et plaisamment expliquées par R.P.Feynman, "Les cours de physique de Feynman", tome 1, chapitre 11 (Inter-Editions, Paris 1979).

(2) La théorie de la relativité enseigne que la physique classique est seulement une approximation (valable dans les domaines où la vitesse de la lumière dans le vide, $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, peut être considérée comme infinie) d'une "physique relativiste" plus générale et plus exacte. Cette dernière introduit un "espace-temps" à quatre dimensions, non euclidien, dont nous dirons quelques mots au paragraphe IV-3.

La physique quantique, qui supplante la physique classique dans les domaines atomique et sub-atomique (où la constante de Planck $h \approx 10^{-34}$ Joule.seconde n'est plus négligeable), peut être non relativiste (physique atomique, moléculaire, des solides,...) ou relativiste (physique des particules, cosmologie). La physique quantique non relativiste utilise comme la physique classique l'espace ordinaire à trois dimensions.

l'espace. Qu'il soit isotrope implique que propriétés et évolution seront indépendantes de l'orientation du système. Bien entendu, l'espace dans lequel nous vivons effectivement n'est ni homogène, ni isotrope : nous nous tenons debout selon la verticale, pas à 45° ; un appareil fonctionnera sans doute mieux si nous l'avons introduit dans le laboratoire par la porte que si nous avons voulu à toute force lui faire traverser l'un des murs. Mais ces "défauts" peuvent être attribués à des contingences : le défaut d'isotropie est explicable par la proximité de la Terre, et l'on connaît même la loi qui régit le champ de pesanteur ; quant à l'existence de murs ...

On imagine donc l'espace comme une sorte de scène de théâtre, au départ vide et inerte, dans laquelle vont exister et évoluer les systèmes physiques qui nous intéressent. Mais cette "scène" a sa structure propre, qui va s'imposer aux systèmes physiques et à l'expression des lois qui les régissent.(3)

L'espace classique, euclidien et à trois dimensions, sera rapporté à un *repère cartésien* constitué d'un trièdre trirectangle Ox, Oy, Oz. On convient que ce trièdre sera toujours *"direct"*, ou *"droit"* : un "bonhomme" se tenant le long de Oz, les pieds en O et la tête sur le demi-axe positif, et regardant le premier quadrant (Ox,Oy) voit Ox à sa droite et Oy à sa gauche. Dans un tel repère, la position d'un point M appartenant à un système physique $\mathcal{S}$ est caractérisée par la donnée de ses coordonnées cartésiennes x, y, z.

2 - Transformations actives et transformations passives sur un système physique.

Considérons un système physique $\mathcal{S}$, dans l'espace rapporté au repère cartésien (Ox,Oy,Oz). Il peut être nécessaire ou commode de *changer de repère, sans toucher au système $\mathcal{S}$* : on dit alors qu'on effectue une *"transformation passive"*. Au contraire, on peut être amené à *déplacer le système $\mathcal{S}$ sans*

---

(3) La structure de cette "scène" où se déroulent les phénomènes physiques est sans doute plus restrictive que celle de l'espace classique et même que celle de l'espace-temps relativiste. Ceci signifie que certaines lois physiques, peut-être même toutes, sont probablement, en réalité, des conséquences de la géométrie de l'espace. La théorie relativiste de la gravitation (dite "théorie de la relativité générale", proposée dès 1916 par Einstein) en est un exemple particulièrement convaincant (cf note 23). Des tentatives pour "géométriser" l'ensemble des lois physiques fondamentales ont vu le jour ces dernières années ; elles ont suscité chez certains beaucoup d'espoirs, mais il est trop tôt pour juger de leur éventuelle réussite.

changer de repère ; dans ce cas, on fait subir au système une "*transformation active*".

Pour concrétiser les arguments qui vont suivre, prenons deux exemples très simples de transformations : une translation et une rotation autour de Oz (4). Dans une *translation active* du système $\mathcal{S}$ (figure 1-a), le point M est déplacé en M', dont les coordonnées x', y', z' sont données à partir de x, y, z, par les relations

$$\begin{aligned} x' &= x + X_a \\ y' &= y + Y_a \qquad (1) \\ z' &= z + Z_a , \end{aligned}$$

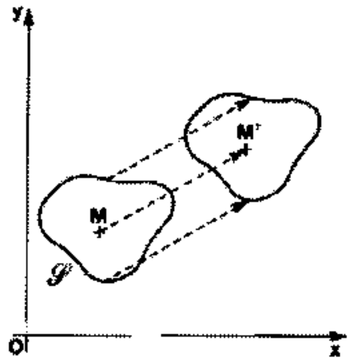

Figure 1-a

où X_a, Y_a et Z_a sont les trois paramètres caractérisant la translation. Dans une *translation passive* (figure 1-b) caractérisée par X_p, Y_p, Z_p (coordonnées de la "nouvelle" origine O" dans "l'ancien" repère Ox,Oy,Oz), les coordonnées du point M (inchangé) deviennent x", y", z" telles que

$$\begin{aligned} x'' &= x - X_p \\ y'' &= y - Y_p \qquad (2) \\ z'' &= z - Z_p . \end{aligned}$$

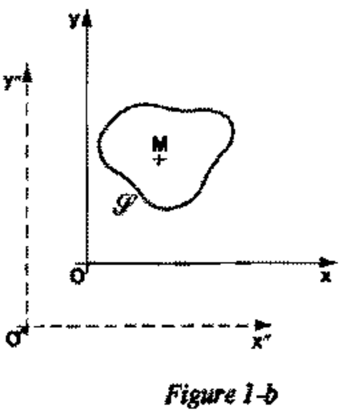

Figure 1-b

Figure 1 : Translation active (a) ou translation passive (b) appliquée à un système physique $\mathcal{S}$ (la figure se limite pour simplifier à des translations parallèles au plan xOy).

---

(4) Bien entendu, il faut de façon générale considérer une transformation quelconque du groupe englobant l'ensemble des translations et des rotations dans l'espace à trois dimensions (groupe des isométries positives).

De façon analogue, une *rotation active* d'angle α_a autour de Oz (figure 2-a) transforme M en M', de coordonnées

$x' = x \cos \alpha_a - y \sin \alpha_a \quad , y' = x \sin \alpha_a + y \cos \alpha_a \quad , z' = z \,, \qquad (3)$

et une *rotation passive* d'angle α_p autour de Oz (figure 2-b) change les coordonnées du point M en :

$x'' = x \cos \alpha_p + y \sin \alpha_p \quad , y'' = - x \sin \alpha_p + y \cos \alpha_p \quad , z'' = z \,. \qquad (4)$

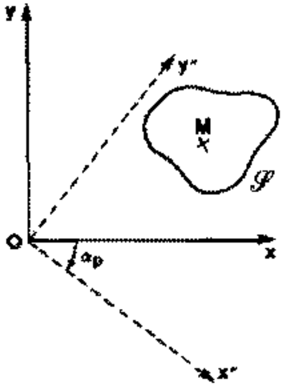

Figure 2-a

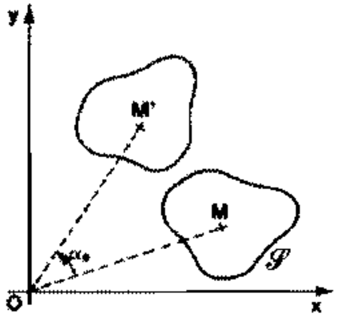

Figure 2-b

Figure 2 : Rotation active (a) ou rotation passive (b) appliquée à un système physique $\mathcal{S}$ (on se limite pour simplifier à des rotations autour de Oz).

3 - Conditions générales d'invariance.

Considérons une transformation particulière. Appliquons-la par exemple de façon *active* au système physique $\mathcal{S}$. Il n'est pas évident *a priori* que les propriétés et l'évolution de $\mathcal{S}$ vont, dans sa nouvelle position et sa nouvelle orientation, rester physiquement les mêmes que celles qu'elles étaient, ou auraient été, dans son ancienne situation. L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de l'espace amène pourtant à affirmer qu'il doit en être ainsi, à condition évidemment que la transformation active ait été appliquée à un système *isolé*, c'est-à-dire qu'on n'ait pas "laissé en arrière" une partie du système qui interagit avec celles que l'on a déplacées.

Appliquons au contraire la transformation choisie de façon *passive* . Le système $\mathcal{S}$ n'étant pas touché, ses propriétés et son évolution ne peuvent que rester inchangées. Mais ce qui, maintenant, n'est plus évident, c'est que les lois physiques régissant ces propriétés et évolution gardent, dans le nouveau repère, la même forme qu'elles avaient dans l'ancien. Ce doit pourtant être le cas, toujours à cause de l'homogénéité et de l'isotropie de l'espace. En effet, la comparaison des formules (1) et (2) montre qu'une translation passive de paramètres (X_p, Y_p, Z_p) est équivalente à la translation active de paramètres $X_a = - X_p$, $Y_a = - Y_p$, $Z_a = - Z_p$; on constate de même sur (3) et (4) qu'une rotation passive d'angle α_p est équivalente à la rotation active d'angle $\alpha_a = - \alpha_p$ autour du même axe. Or, si l'espace est homogène et isotrope, *seules la position et l'orientation relatives du système et du repère sont significatives* . C'est pourquoi nous parlons d' "équivalence" pour les couples de transformations (l'une passive, l'autre active) que nous avons considérées ; les figures 1 et 2 illustrent cette équivalence, qui se généralise sans difficulté à l'ensemble des translations et rotations.

L'une ou l'autre des deux propositions qualifiées dans ce qui précède de "non évidentes" expriment *l'invariance des lois physiques dans les transformations considérées.*

4 - Implications de l'invariance sur la forme des lois physiques.

Pour préciser, et voir plus clairement que l'exigence d'invariance a des implications hautement non triviales sur les formes analytiques permises aux lois physiques, choisissons l'un des points de vue, par exemple le passif. Prenons une loi physique quelconque, sous la forme

$$f(G, H, \ldots) = 0 : \qquad (5)$$

G, H,...sont des grandeurs physiques (pression, température, composante d'une force ou du champ électrique, gradient de température, divergence du champ électrique, ...) et f représente une relation, souvent assez simple, entre elles (la formulation est très schématique, mais elle devrait suffire à mettre en évidence le point essentiel). Lorsque cette loi physique est appliquée au système $\mathcal{S}$ avant transformation, les grandeurs G, H, ... doivent être évaluées en divers points $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, ... de $\mathcal{S}$, ce que nous écrivons de façon symbolique

$$f(G(x_1,y_1,z_1), H(x_2,y_2,z_2), \ldots) = 0 , \qquad (6)$$

en nous rappelant que certaines des grandeurs font intervenir des dérivées par rapport à x, y ou z.

Effectuons maintenant la transformation (passive, avons-nous dit). Les propriétés du système $\mathcal{S}$ sont inchangées, mais chacun de ses points M est maintenant repéré par des coordonnées différentes x", y", z" ; les diverses grandeurs physiques changent elles aussi, *a priori* : la composante du champ électrique suivant Ox n'est pas égale à sa composante suivant Ox" (si la transformation est une rotation). A partir des formules de transformation des coordonnées telles que (2) et (4) (ou plutôt de leurs inverses), on peut remplacer dans (6) les divers triplets (x,y,z), et les dérivées correspondantes, en fonction des x", y" et z" ; il faut également connaître l'expression des grandeurs G, H, ... en fonction des G", H", ... qui sont leurs analogues dans le nouveau repère, et effectuer aussi ce remplacement dans (6). On imaginera sans peine que tout ceci donne, entre $G''(x''_1,y''_1,z''_1)$,$H''(x''_2,y''_2,z''_2)$,... une relation *a priori* très différente de f .Pourtant, si f caractérise une loi physique invariante dans la transformation envisagée, tout doit se réarranger pour donner dans le nouveau repère *une expression de la loi exactement semblable* à celle qui prévalait dans l'ancien repère, c'est-à-dire, dans notre notation symbolique,

$$f\,(G''(x''_1,y''_1,z''_1),H''(x''_2,y''_2,z''_2),\ldots) = 0. \qquad (7)$$

On conçoit qu'une telle exigence, étendue à l'ensemble des transformations d'un groupe, impose des *contraintes extrêmement sévères sur les formes analytiques possibles pour les lois physiques*, c'est-à-dire sur les relations f permises. Dans la pratique, l'utilisation de grandeurs physiques ayant des propriétés de transformation simples dans les translations et les rotations (grandeurs dites "tensorielles") permet, nous allons le voir, d'écrire assez facilement des lois physiques possédant de façon manifeste les propriétés d'invariance requises.

II - Les grandeurs scalaires.

1 - Définition et exemples.

Certaines grandeurs sont caractérisées (dans un système d'unités choisi à l'avance) par un nombre, que l'on appelle leur *valeur* . Une telle grandeur est dite *scalaire* si sa valeur au point M reste inchangée, quelle que soit la situation physique envisagée, dans une translation ou une rotation passive. Dans une translation ou une rotation active, la valeur d'une grandeur scalaire "se transporte" sans changement au point M' transformé de M. Indiquons que certaines grandeurs scalaires ont des valeurs algébriques.

La masse et la charge électrique d'une particule (associées évidemment au point où se trouve cette particule), la pression et la température aux divers points d'un échantillon de gaz,... sont des grandeurs scalaires. En anticipant un peu, disons que la divergence du champ électrique (ou d'un champ de vecteurs quelconque) est aussi un scalaire. Soulignons en revanche que la coordonnée du point M selon l'axe Ox (ou la composante d'un vecteur sur cet axe) *n'est pas un scalaire* : sa valeur change en effet dans une rotation passive (puisque l'axe Ox change alors) comme dans une rotation active (la coordonnée de M' suivant Ox est différente de celle de M).

2 - Egalités entre scalaires. Homogénéité.

Certaines lois physiques prennent la forme d'une égalité entre deux grandeurs scalaires ; c'est le cas pour l'équation d'état des gaz parfaits $pV = nRT$, ou pour la loi de Joule $W = RI^2t$ en électricité, ou pour l'équation de conservation locale de la charge électrique $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\vec{j} = 0$ (où ρ est la densité volumique de charge et $\vec{j}$ le vecteur densité de courant). Chacun des deux membres, étant scalaire, reste inchangé dans une translation active ou passive, de sorte que l'égalité persiste elle aussi.

Il existe également des égalités, que l'on peut hésiter à ranger parmi les "lois physiques" car elles n'en n'ont pas la généralité, mais qui obéissent aux mêmes règles ; ces égalités expriment simplement que, dans telle situation particulière, la valeur de telle grandeur physique est égale à celle de telle autre. Par exemple, la pression au point M_1 est égale à la pression au point M_2 : $p(M_1) = p(M_2)$; ou bien la pression au point M_1 est égale à la somme des pressions aux points M_2 et M_3 : $p(M_1) = p(M_2) + p(M_3)$; ou bien la masse de tel "point matériel" est double de celle de tel autre,... Bien entendu, ces égalités sont des conséquences, dans un problème concret, des lois physiques générales, ou elles sont au moins compatibles avec celles-ci.

Nous venons d'indiquer que l'égalité entre deux grandeurs scalaires (ou, ce qui revient au même, la nullité de la somme de grandeurs scalaires) vérifie la condition d'invariance discutée aux paragraphes I-3 et I-4. Cette condition impose en retour la règle suivante : si le premier membre d'une égalité (ou le premier terme d'une somme) est un scalaire, alors le second membre (ou les autres termes) doit lui aussi être un scalaire. Une égalité qui ne satisferait pas à cette règle ne pourrait (dans le point de vue passif, par exemple) être valable que dans un repère particulier ; elle cesserait de l'être dans d'autres repères, puisque le premier membre garderait la même valeur, et pas le second, au cours d'une transformation passive.

Rappelons à cette occasion une autre règle que doivent vérifier les égalités en physique. Chaque grandeur (quelles que soient par ailleurs ses propriétés de transformation, nous y reviendrons) possède des *"dimensions physiques"* : c'est une longueur, ou une masse, ou bien une longueur divisée par un temps (vitesse), ... La *condition d'homogénéité*, que doivent vérifier toutes les égalités physiques, exige que les deux membres de l'égalité (ou les divers termes d'une somme) aient mêmes dimensions. Il est licite d'écrire $v^2 = 2gh$, où v est une vitesse, g une accélération et h une longueur[5], mais sûrement pas $v = \sqrt{g}$.

III . Les grandeurs vectorielles.

Après les scalaires, les grandeurs physiques qui présentent les propriétés de transformation les plus simples dans les translations et rotations (actives ou passives) sont les vecteurs.

1 - Définition et exemples .

a - Définition "géométrique".

Dans les cours élémentaires (de physique en tout cas), on définit une grandeur vectorielle par les caractéristiques suivantes :

(i) une *valeur positive*, souvent appelée son *"module"*, quelquefois son "intensité" ;

(ii) une *direction* de l'espace (on dit parfois "une direction et un sens", selon ce que l'on entend par "direction").

On note les grandeurs vectorielles en surmontant d'une flèche le symbole correspondant[6] : $\vec{A}$; leur module est noté $\|\vec{A}\|$, ou plus simplement $|\vec{A}|$. Comme toute grandeur physique, une grandeur vectorielle est en règle générale attachée à un point M de l'espace : la vitesse $\vec{v}$ d'une particule, ou son accélération $\vec{\gamma}$, ou la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur elle, sont tout naturellement liées à sa position ; ou bien, lors de l'écoulement d'un fluide dans un tuyau, on s'intéresse à la vitesse de cet écoulement aux divers points du tuyau ("champ de vitesses"). On représente très souvent les grandeurs vectorielles directement sur la figure montrant l'espace physique lui-même : on trace un segment de droite dont l'origine est le point M, dont la direction est celle de la grandeur considérée, dont la longueur est proportionnelle à la valeur de cette grandeur (voir plus loin paragraphe *b*), et qui se termine par une pointe de flèche.

On notera que la définition "géométrique" qui vient d'être esquissée ne fait *aucune mention du repère* auquel est rapporté l'espace. Nous verrons qu'elle

---

(5) Il va sans dire que, à l'inverse, toute égalité entre deux scalaires de mêmes dimensions physiques n'est pas obligatoirement compatible avec les lois physiques ! ...

(6) Dans certains livres, on préfère écrire le symbole en caractères gras.

sous-entend pourtant un comportement particulier dans les transformations d'espace, actives ou passives.

b - Exemples.

Choisissons, outre le point M auquel va être attachée la grandeur vectorielle, un autre point N de l'espace. Ceci permet de définir un vecteur, noté $\overrightarrow{MN}$ (que nous appellerons *"vecteur géométrique"*), dont la valeur (module) est la distance entre M et N, et la direction celle de la droite MN, de M vers N. Mais il existe bien d'autres grandeurs vectorielles : outre les vitesses, accélérations et forces déjà évoquées, citons le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$, la densité de courant électrique $\vec{j}$ dans un conducteur, le gradient d'une fonction de point scalaire quelconque, etc.

Trois remarques s'imposent. En premier lieu, une grandeur vectorielle possède elle aussi des *dimensions physiques*, "portées" par son module : longueur pour les vecteurs géométriques, longueur divisée par un temps pour les vitesses et par le carré d'un temps pour les accélérations, etc. Deuxièmement, certaines des grandeurs vectorielles citées sont des *champs vectoriels*, c'est-à-dire des fonctions de point à valeurs vectorielles $\vec{A}(M) \equiv \vec{A}\,(x,y,z)$; mais le fait d'associer une grandeur vectorielle à un point de l'espace n'en fait pas obligatoirement un champ, comme le montre l'exemple de la vitesse ou de l'accélération d'une particule ponctuelle [(7)]. Enfin, s'il est possible de représenter une grandeur vectorielle directement dans l'espace, c'est parce que sa direction est celle d'un axe de l'espace ; lorsqu'on utilise une telle représentation, l'origine de la flèche est un point de l'espace (celui auquel est associée la grandeur), sa direction est une direction de l'espace, mais son extrémité n'est un point de l'espace que dans le cas très particulier où sa dimension physique est celle d'une longueur (c'est-à-dire s'il s'agit d'un vecteur géométrique) ; ainsi, la longueur relative des flèches représentatives de deux grandeurs vectorielles n'a de signification que si ces deux grandeurs ont mêmes dimensions physiques (auquel cas le rapport des longueurs des flèches reproduira celui des valeurs des grandeurs représentées).

Rappelons qu'il est utile d'introduire des *vecteurs unitaires* : ce sont des grandeurs vectorielles *sans dimension*, dont le module vaut 1 par définition ;

---

(7) La situation est la même pour les grandeurs scalaires : la pression dans l'atmosphère est un champ scalaire (fonction de point scalaire), pas la masse ou la charge d'une particule.

ainsi, un vecteur unitaire est caractérisé par, ou caractérise, une direction de l'espace. Les anglo-saxons utilisent une notation très commode qui consiste à remplacer, pour les vecteurs unitaires, la flèche par un "chapeau" (accent circonflexe) : $\hat{A}$ est le vecteur unitaire associé à la direction du vecteur $\vec{A}$.

c - Composantes cartésiennes.

Lorsqu'on introduit les vecteurs par la définition "géométrique" du paragraphe 1-a ci-dessus, leurs propriétés se déduisent de leur représentation par un segment orienté, même s'il ne s'agit pas de vecteurs géométriques. Autrement dit, ces derniers servent de "modèle" pour toutes les grandeurs vectorielles, à condition toutefois de tenir compte des dimensions physiques de ces diverses grandeurs.

Prenons donc le segment orienté d'origine M, représentant une grandeur vectorielle $\vec{A}$. Traçons, avec M pour origine, un trièdre trirectangle $M\tilde{x}$, $M\tilde{y}$, $M\tilde{z}$ dont les axes sont parallèles, et de même sens, à Ox, Oy, Oz, respectivement. Les composantes cartésiennes A_x, A_y, A_z de $\vec{A}$ sont les mesures algébriques des projections orthogonales, sur les "axes locaux" $M\tilde{x}$, $M\tilde{y}$, $M\tilde{z}$, du segment orienté représentant $\vec{A}$ (figure 3). Si θ_A et φ_A sont les angles ($0 \leq \theta_A \leq \pi$; $0 \leq \varphi_A < 2\pi$) permettant de repérer la direction de $\vec{A}$ (figure 4), les composantes cartésiennes de $\vec{A}$ s'écrivent

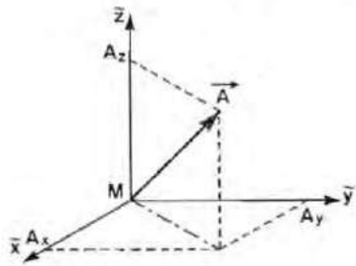

Figure 3 : Construction des composantes cartésiennes A_x, A_y, A_z d'une grandeur vectorielle $\vec{A}$ à l'aide du segment orienté qui la représente et des axes locaux $M\tilde{x}, M\tilde{y}, M\tilde{z}$.

$$A_x = |\vec{A}| \sin\theta_A \cos\varphi_A, \quad A_y = |\vec{A}| \sin\theta_A \sin\varphi_A, \quad A_z = |\vec{A}| \cos\theta_A . \qquad (8)$$

Leurs dimensions physiques sont donc celles du module $|\vec{A}|$ de $\vec{A}$, c'est à dire celles de la grandeur vectorielle $\vec{A}$ elle-même.

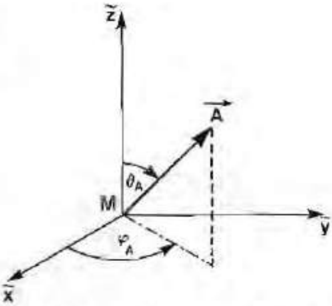

Figure 4 : Repérage de la direction de la grandeur vectorielle $\vec{A}$ par les angles θ_A et φ_A ($0 \le \theta_A \le \pi$, $0 \le \varphi_A < 2\pi$).

2 - Comportement d'un vecteur dans une transformation d'espace.

a - Analyse à partir de la définition "géométrique".

Effectuons une transformation d'espace, par exemple passive (paragraphe I-2). Les coordonnées du point M auquel est attachée la grandeur vectorielle $\vec{A}$ que nous considérons changent, selon des formules dont (2) et (4) sont des exemples simples. Pour déterminer le comportement de la grandeur $\vec{A}$, nous faisons appel ici aussi au segment orienté qui la représente. Sur les figures 3 et 4, les axes locaux $M\tilde{x}$, $M\tilde{y}$, $M\tilde{z}$ restent inchangés dans le cas d'une translation du repère (cf figure 1-b) mais tournent avec ce dernier dans le cas d'une rotation (cf figure 2-b).

On constate aussitôt que la longueur du segment représentant $\vec{A}$ n'est jamais modifiée. Par conséquent le *module* $|\vec{A}|$ de la grandeur vectorielle, sa "valeur", est invariante dans tout changement d'axes de référence ; c'est donc un *scalaire*.

D'autre part, aucune des caractéristiques de la grandeur vectorielle n'est affectée par une translation (active ou passive). Il n'en est évidemment pas de même dans une rotation : ni les angles θ_A , φ_A qui repèrent la direction de $\vec{A}$ (figure 4), ni ses composantes cartésiennes A_x, A_y, A_z (figure 3), ne sont des scalaires. Mais leurs propriétés de transformation sont simples : par exemple, dans une rotation passive d'angle α_p autour de Oz, les composantes cartésiennes de $\vec{A}$ changent selon les formules

$$A_{x''} = A_x \cos \alpha_p + A_y \sin \alpha_p,\ A_{y''} = - A_x \sin \alpha_p + A_y \cos \alpha_p,\ A_{z''} = A_z. \quad (9)$$

De façon générale , *les composantes cartésiennes d'une grandeur vectorielle restent inchangées dans une translation et se transforment dans une rotation comme les coordonnées d'un point.*

b - Définition "analytique" des vecteurs .

On peut caractériser une grandeur vectorielle en spécifiant *ses composantes dans un repère donné*. Mais ceci ne définit véritablement un vecteur que si *ces composantes possèdent les propriétés de transformation* explicitées au paragraphe précédent. En particulier, l'ensemble de trois grandeurs scalaires ne peut pas constituer un vecteur : par exemple, les grandeurs pV, RT et E (où p, V, T et E sont la pression, le volume, la température et l'énergie d'un échantillon de gaz et R la "constante des gaz parfaits") ont mêmes dimensions physiques, mais il n'est pas possible de les considérer comme les trois composantes cartésiennes d'un vecteur, car elles n'en possèdent pas les propriétés de transformation caractéristiques (elles restent toutes trois inchangées dans une rotation des axes de référence).

La définition d'un vecteur à partir de ses composantes et de leurs propriétés de transformation peut paraître moins synthétique que la définition "géométrique" habituelle (paragraphe 1-a), car elle suppose le choix préalable d'un repère et fait appel aux transformations (actives ou passives) dans l'espace. Elle est pourtant très utile à connaître, non seulement parce qu'elle met en lumière l'importance du comportement des grandeurs dans les transformations de l'espace (cf paragraphe IV-1), mais aussi parce qu'elle peut être généralisée à des espaces de structure différente (paragraphe IV-3).

3 - Egalités entre vecteurs, sommes et produits.

a - Egalité, somme et multiplication par un scalaire.

On ne peut envisager, en physique, l'égalité de deux grandeurs vectorielles que si elles ont *mêmes dimensions physiques*. Mais si c'est le cas, point n'est besoin d'inventer des notions nouvelles comme celle d' "équipollence" ou celle de "vecteurs glissants", "libres" ou "liés" : de même que la pression au point M_1 peut être égale à la pression au point M_2, de même la vitesse (vectorielle) de la particule (1) peut être égale à celle de la particule (2), ou le champ électrique au point M_1 peut être double du champ électrique en M_2. Evidemment, deux grandeurs vectorielles seront égales si elles ont même valeur (c'est-à-dire même module) et même direction, ou, ce qui revient au même, si leurs composantes cartésiennes sont égales chacune à chacune.

Le produit d'une grandeur vectorielle par une grandeur scalaire est une grandeur vectorielle, car l'invariance des scalaires dans les transformations d'espace préserve le comportement caractéristique des vecteurs. Le facteur scalaire peut être sans dimension (définition du double ou de l'opposé d'un vecteur, ou de sa multiplication par un nombre réel quelconque, positif, négatif ou nul) ; s'il possède des dimensions physiques, la grandeur vectorielle obtenue par produit a pour dimensions le produit de celles du vecteur initial par celles du scalaire : ainsi $m\vec{\gamma}$, où m est une masse et $\vec{\gamma}$ une accélération, a mêmes dimensions qu'une force $\vec{F}$.

Comme le module $|\vec{A}|$ d'une grandeur vectorielle quelconque $\vec{A}$ est un scalaire, on peut multiplier $\vec{A}$ par $1/|\vec{A}|$. On obtient ainsi une grandeur vectorielle, sans dimension et de module unité, qui n'est autre que le vecteur unitaire $\widehat{A}$ associé à la direction de $\vec{A}$:

$$\widehat{A} = \frac{1}{|\vec{A}|}\vec{A} \quad , \text{ou } \vec{A} = |\vec{A}|\,\widehat{A} \ . \qquad (10)$$

La somme $\vec{A} + \vec{B}$ de deux grandeurs vectorielles de mêmes dimensions physiques est le vecteur qui a pour composantes cartésiennes les sommes $A_x + B_x$, $A_y + B_y$ et $A_z + B_z$ des composantes de $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Traduite en termes de modules et directions, cette définition aboutit à la fameuse "règle du parallélogramme". Ici non plus, il n'y a pas de précautions particulières à prendre pour additionner deux vecteurs associés à deux points différents de l'espace : $\vec{A}(M) = \vec{A}(M_1) + \vec{A}(M_2)$ est tout à fait analogue à $p(M) = p(M_1) + p(M_2)$, où p est la pression (grandeur scalaire).

Si $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ désignent les vecteurs unitaires des axes de référence Ox, Oy et Oz, on peut écrire une grandeur vectorielle quelconque $\vec{A}$ sous la forme

$$\vec{A} = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z \ : \qquad (11)$$

en mettant bout à bout, conformément à la règle du parallélogramme, le vecteur porté par $M\tilde{x}$ et de mesure algébrique A_x, puis le vecteur porté par $M\tilde{y}$ et de mesure algébrique A_y et enfin le vecteur porté par $M\tilde{z}$ et de mesure algébrique A_z (cf figure 3), on obtient effectivement le vecteur $\vec{A}$. Mais la formule précédente appelle deux remarques. En premier lieu, ce n'est pas parce que toutes les grandeurs vectorielles peuvent être ainsi décomposées selon le même triplet $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ de vecteurs unitaires qu'elles appartiennent à un espace vectoriel unique : il n'est pas question de sommer un champ électrique et une accélération, parce que ces deux grandeurs vectorielles ont des dimensions physiques différentes ; dans la décomposition (11) de la grandeur $\vec{A}$, ses dimensions sont, rappelons-le, "portées" par ses composantes A_x, A_y, A_z. Deuxièmement, dans le produit $A_x\hat{e}_x$ par exemple, $\hat{e}_x$ apparaît comme un vecteur (sans dimension) mais A_x n'est pas un scalaire (cf § 2-a) ; si la formule (11) est néammoins correcte, c'est que $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ et $\hat{e}_z$ sont des vecteurs très particuliers, qui font exception aux règles de transformation énoncées au paragraphe 2 : dans une rotation active, par exemple, toutes les grandeurs vectorielles attachées au système physique étudié voient leurs composantes changer, alors que $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ et $\hat{e}_z$, liés au repère et non au système, restent inchangés.(8)

On peut évidemment reprendre pour les vecteurs, *mutatis mutandis*, les remarques formulées au paragraphe II-2 pour les égalités entre scalaires : l'égalité entre deux grandeurs vectorielles, à condition d'être homogène du point de vue des dimensions physiques, est compatible avec l'exigence d'invariance explicitée dans les paragraphes I-3 et I-4 ; inversement, si l'un des membres d'une égalité est un vecteur, les conditions d'invariance imposent que l'autre soit aussi un vecteur (En particulier, une égalité entre un scalaire et une composante cartésienne d'un vecteur est interdite par ce critère).

b - Produits de vecteurs.

Le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$ de deux grandeurs vectorielles peut être défini dans le cadre "géométrique" :

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \times \cos(\vec{A},\vec{B}) . \tag{12}$$

On voit alors aussitôt qu'il s'agit effectivement d'un scalaire, au sens du paragraphe II-1. On peut ensuite exprimer le produit scalaire à l'aide des composantes des deux vecteurs, ce qui donne

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{13}$$

On vérifie d'ailleurs facilement que le comportement de (A_x,A_y,A_z) et (B_x,B_y,B_z) dans une rotation a bien pour conséquence l'invariance de l'expression (13).

---

(8) On notera, dans le même ordre d'idées, que le "produit scalaire" $\hat{e}_x.\vec{A}$ n'est pas un scalaire puisqu'il donne A_x.

Pour le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$, il peut être plus simple de poser sa définition dans le cadre "analytique" : $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ est le vecteur de composantes

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y \text{ , } C_y = A_zB_x - A_xB_z \text{ , } C_z = A_xB_y - A_yB_x. \qquad (14)$$

Il faut évidemment démontrer que C_x, C_y et C_z présentent bien les propriétés de transformation caractéristiques d'un vecteur. On constate effectivement sans difficulté que les formules (9), et leurs analogues pour $\vec{B}$, impliquent

$$\begin{aligned} C_{x''} &= A_{y''}B_{z''} - A_{z''}B_{y''} = C_x \cos \alpha_p + C_y \sin \alpha_p \text{ ,} \\ C_{y''} &= A_{z''}B_{x''} - A_{x''}B_{z''} = - C_x \sin \alpha_p + C_y \cos \alpha_p \text{ ,} \\ C_{z''} &= A_{x''}B_{y''} - A_{y''}B_{x''} = C_z \text{ .} \end{aligned} \qquad (15)$$

(Bien entendu, la démonstration, pour être convaincante, doit porter sur la rotation la plus générale). Il est ensuite facile, par exemple en choisissant un système d'axes Ox,Oy,Oz particulier, de préciser les caractéristiques "géométriques" du produit vectoriel $\vec{C}$: son module est donné par

$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right| \times \left|\vec{B}\right| \times \left|\sin(\vec{A}, \vec{B})\right| \text{ ,} \qquad (16)$$

et sa direction est perpendiculaire au plan défini par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (c'est-à-dire par leurs directions), dans le sens tel que $\vec{C}$ forme avec $\vec{A}$ et $\vec{B}$, dans cet ordre, un trièdre direct.

On dit généralement, à propos du produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$, que son module (16) est égal à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Cette affirmation, dont le but, *a priori* louable, est de "concrétiser" la notion de produit vectoriel, s'avère en pratique catastrophique sur le plan pédagogique (pour la physique, tout au moins) : pour un élève à qui l'on a inculqué que tous les vecteurs sont des vecteurs géométriques, homogènes à une longueur (ou des classes d'équivalence de bipoints), se trouver tout à coup confronté à un vecteur dont le module est une aire ne peut que le brouiller définitivement avec la notion (fondamentale en physique) d'homogénéité. De ce point de vue, les dimensions physiques de $\vec{C}$ sont le produit de celles de $\vec{A}$ et celles de $\vec{B}$ (comme le sont d'ailleurs les dimensions du produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$) ; ce n'est que dans le cas très particulier où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont tous deux homogènes à une longueur que l'affirmation précédente est correcte (ce qui exclut évidemment que $\vec{C}$ soit lui aussi un vecteur géométrique).

IV - Généralisations diverses.

Les notions précédentes concernant les scalaires et les vecteurs dans l'espace "classique" à trois dimensions, et fondées sur l'idée fondamentale d'invariance des lois physiques dans les transformations de cet espace, peuvent être généralisées dans plusieurs directions. Nous allons indiquer ici trois de ces généralisations possibles, qui restent dans le cadre de la physique élémentaire.

1 - Grandeurs tensorielles.

Scalaires et vecteurs sont les exemples les plus simples de *"tenseurs"*.(9)

Pour préciser ce qu'est un tenseur, modifions légèrement nos notations : Ox_1, Ox_2, Ox_3 seront les axes du trièdre de référence, x_1, x_2, x_3 les coordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace, etc. Lors d'une transformation d'espace (active, disons) composée d'une translation de paramètres X_i ($i = 1,2,3$) et d'une rotation représentée par la matrice 3x3 $[R_{ij}]$, les coordonnées du point M' transformé de M sont données par

$$x'_i = R_{ij}x_j + X_i \quad ; \quad i = 1,2,3 \; ; \tag{17}$$

nous avons utilisé la *convention d'Einstein* selon laquelle (sauf indication contraire explicite) il y a sommation sur tout indice répété :

$$R_{ij}x_j \equiv \sum_{j=1}^{3} R_{ij}x_j \; . \tag{18}$$

Dans ces nouvelles notations, les trois composantes A_i d'un vecteur $\vec{A}$ se transforment selon

$$A'_i = R_{ij}\,A_j \; . \tag{19}$$

Une grandeur tensorielle du second ordre est alors caractérisée par un ensemble de composantes T_{ij} ($i,j = 1,2,3$) se transformant de la manière suivante :

$$T'_{ij} = R_{ik}\,R_{jl}\,T_{kl} \; . \tag{20}$$

---

(9) Scalaires, vecteurs et tenseurs réalisent des *représentations* du groupe des rotations. On utilise également, en mécanique quantique, une représentation (à un facteur près) de ce groupe par des *"spineurs"* à deux composantes.

Cette définition se généralise sans peine à des tenseurs d'ordre supérieur à deux.

Les grandeurs tensorielles sont moins courantes, en physique élémentaire, que les scalaires et les vecteurs, et leur existence est souvent passée sous silence ou ignorée. Elles interviennent par exemple dans les relations linéaires entre deux grandeurs vectorielles à l'intérieur d'un milieu anisotrope : si, dans un milieu isotrope, deux grandeurs vectorielles sont simplement proportionnelles :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad (21)$$

(auquel cas le coefficient de proportionnalité ε est un scalaire), leur relation devient souvent tensorielle lorsqu'on la considère dans un milieu anisotrope :

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \, . \qquad (22)$$

On utilise volontiers en physique, pour leur commodité, deux tenseurs très particuliers : ce sont des tenseurs *numériques* (c'est-à-dire sans dimension) *invariants* (c'est-à-dire que leurs composantes restent inchangées dans toute rotation)(10). Le premier, dit "symbole de Kronecker", est noté δ_{ij}, et ses composantes valent par définition (11)

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 0 \text{ si } i \neq j \, , \\ &= 1 \text{ si } i = j \, . \end{aligned} \qquad (23)$$

Le second est le *tenseur totalement antisymétrique d'ordre 3*, noté ε_{ijk}, et défini par(12)

---

(10) On peut montrer que ce sont les deux seuls tenseurs invariants.

(11) C'est parce que les matrices 3x3 de rotation R sont orthogonales : $R^T R = R R^T = \mathbf{1}$ (où R^T désigne la transposée de la matrice R), que les valeurs (23) sont invariantes par rotation, bien que δ_{ij} se transforme comme un tenseur d'ordre 2 : $\delta'_{ij} = R_{ik} R_{jl} \delta_{kl} = R_{ik} R_{jk} = [RR^T]_{ij} = \delta_{ij}$. En réalité, le symbole de Kronecker est le "tenseur métrique" de l'espace euclidien (Cf § 3-b).

(12) Si les valeurs (24) sont invariantes dans toute rotation, c'est que les matrices de rotation R vérifient dét R = 1. En effet, $\varepsilon'_{ijk} = R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} \varepsilon_{i'j'k'}$ est nul si deux des indices i, j, k sont égaux (utiliser l'antisymétrie de $\varepsilon_{i'j'k'}$ pour montrer

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} &= 0 \text{ si 2 des 3 indices prennent la même valeur ;}\\ &= +1 \text{ si } (i,j,k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3) \text{ ;} \qquad (24)\\ &= -\ 1 \text{ si } (i,j,k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3).\end{aligned}$$

Ce dernier tenseur permet par exemple d'écrire de façon compacte et commode l'expression (14) des composantes du produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$:

$$C_i = \varepsilon_{ijk}\, A_j\, B_k\,. \qquad (25)$$

Quant au symbole de Kronecker, il est couramment utilisé pour caractériser l'orthonormalité d'une base : $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, vecteurs unitaires des axes de référence Ox_1, Ox_2, Ox_3, vérifient les égalités (cf note 8)

$$\hat{e}_i \,.\, \hat{e}_j = \delta_{ij}\,. \qquad (26)$$

2 - *Comportement des scalaires et des vecteurs dans les symétries par rapport à un point ou à un plan.*

a - Vrais vecteurs et pseudovecteurs.

Considérons d'abord un vecteur géométrique $\overrightarrow{MN}$, et construisons son symétrique par rapport à un point Ω (figure 5) ou par rapport à un plan Π (figure 6)[13] .On voit aussitôt que, dans une symétrie par rapport à un point Ω,

$$\overrightarrow{M'N'} = -\,\overrightarrow{MN}\,; \qquad (27)$$

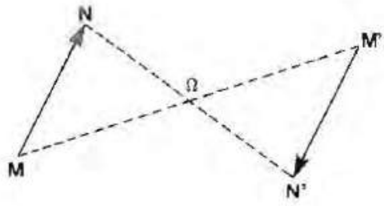

Figure 5 : Construction du symétrique $\overrightarrow{M'N'}$ de $\overrightarrow{MN}$ par rapport à un point Ω.

---

que le second membre est alors égal à son opposé) ; en outre, on voit facilement que $\varepsilon'_{123} = -\varepsilon'_{213} = \text{dét}\, R = +1$.

(13) Nous n'envisageons ici que des symétries actives, car les symétries passives correspondantes transforment le trièdre de référence direct en un trièdre inverse, et nous avons convenu au paragraphe I-1 de nous en tenir aux repères directs.

dans une symétrie par rapport à un plan Π, la composante $\overrightarrow{MP}$ parallèle à Π reste inchangée alors que la composante $\overrightarrow{PN}$ perpendiculaire à Π est changée en son opposée :

$$\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{MP}\ ,\ \overrightarrow{P'N'} = -\ \overrightarrow{PN}\ . \qquad (28)$$

Les grandeurs vectorielles $\vec{V}$ qui se comportent, dans de telles symétries, comme les vecteurs géométriques, sont appelées *"vrais vecteurs"*, ou *"vecteurs polaires"* :

$\vec{V'} = -\ \vec{V}$ dans une symétrie par rapport à un point ; (29-a)

$\overrightarrow{V'_{/\!/}} = \overrightarrow{V_{/\!/}}\ ,\ \overrightarrow{V'_{\perp}} = -\ \overrightarrow{V_{\perp}}$ dans une symétrie par rapport à un plan. (29-b)

($\overrightarrow{V_{/\!/}}$ et $\overrightarrow{V_{\perp}}$ sont les composantes de $\vec{V}$ respectivement parallèle et perpendiculaire au plan de symétrie).

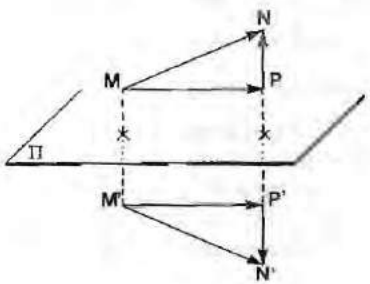

Figure 6 : Construction du symétrique $\overrightarrow{M'N'}$ d'un vecteur géométrique $\overrightarrow{MN}$ par rapport à un plan Π.

Mais, si $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs polaires, leur produit vectoriel $\vec{A} = \vec{V} \wedge \vec{W}$ se comporte, dans les symétries par rapport à un point ou un plan, de façon exactement opposée[14] :

---

[14] C'est évident pour (30-a) : les deux changements de signe de $\vec{V}$ et $\vec{W}$ se compensent. Quant aux relations (30-b), elles découlent des constatations suivantes : $\overrightarrow{V_{\perp}} \wedge \overrightarrow{W_{\perp}} = \vec{0}$; $\overrightarrow{A_{\perp}} = \overrightarrow{V_{/\!/}} \wedge \overrightarrow{W_{/\!/}}$; $\overrightarrow{A_{/\!/}} = \overrightarrow{V_{/\!/}} \wedge \overrightarrow{W_{\perp}} + \overrightarrow{V_{\perp}} \wedge \overrightarrow{W_{/\!/}}$.

$\overrightarrow{A'} = + \overrightarrow{A}$ dans une symétrie par rapport à un point ; (30-a)

$\overrightarrow{A'}_{//} = - \overrightarrow{A}_{//}$, $\overrightarrow{A'}_{\perp} = + \overrightarrow{A}_{\perp}$ dans une symétrie par rapport à un plan. (30-b)

On appelle *"pseudovecteurs"*, ou *"vecteurs axiaux"*, les grandeurs vectorielles se transformant selon les formules (30).

Une vitesse, une force, un champ électrique,... sont des vecteurs polaires ; un moment cinétique, un vecteur vitesse angulaire, un champ magnétique,...sont des vecteurs axiaux. On comprend que le comportement, dans les symétries, d'un produit vectoriel est caractérisé par le produit des changements de signes des deux grandeurs qui le construisent.

b - Vrais scalaires et pseudoscalaires.

Les scalaires, invariants par rotation, se divisent eux aussi en deux catégories lorsqu'on envisage les opérations de symétrie par rapport à un point ou à un plan : les *"vrais scalaires"* gardent leur valeur, les *"pseudoscalaires"* sont changés en leur opposé.

On montre sans difficulté que le produit scalaire de deux vecteurs polaires ou de deux vecteurs axiaux est un vrai scalaire ; le produit scalaire d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial est un pseudoscalaire (c'est le cas en particulier pour le produit mixte de trois vecteurs polaires).

3 - Scalaires, vecteurs et tenseurs en relativité (restreinte).

a - Introduction succincte aux idées fondamentales de la théorie de la relativité.

Pour décrire le mouvement d'un corps on doit, en mécanique, choisir un *référentiel* : le mouvement d'un objet situé dans un train, par exemple, s'analyse différemment dans le "référentiel lié au train" et dans le "référentiel lié au sol". La mécanique classique (newtonienne) postule l'existence d'au moins un référentiel dans lequel sont valables les trois lois de Newton. Mais la structure de celles-ci implique que, s'il existe un tel référentiel, alors il en existe une infinité, animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement de translation uniforme. Comme la première loi de Newton se contente de reprendre le "principe d'inertie" de Galilée, de tels référentiels sont dits *"galiléens"*, ou *"d'inertie"*. La mécanique classique obéit donc déjà à un *principe de relativité*, auquel est encore associé le nom de Galilée, car c'est lui qui l'a énoncé, de façon étonnamment claire, dès 1632 : les lois de la mécanique sont les mêmes dans deux référentiels en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre ; il n'existe donc pas un référentiel privilégié unique, par rapport auquel pourraient être définies de façon absolue les notions de repos et de mouvement, mais une infinité de référentiels équivalents. Le passage de l'un à l'autre de ces référentiels se fait par les formules de la *"transformation de Galilée"* (toujours lui !) : soit $\mathcal{R}$ un premier référentiel, dans lequel on a choisi un repère (Ox,Oy,Oz), et soit $\mathcal{R}'$ un second référentiel, caractérisé par un repère (O'x',O'y',O'z') en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse constante $\vec{V}$; si, à l'instant t [15], un mobile ponctuel se trouve au point de coordonnées x, y, z dans $\mathcal{R}$, ses coordonnées x',y',z' dans $\mathcal{R}'$ sont données par

$$x' = x - V_x t \quad , \; y' = y - V_y t \quad , z' = z - V_z t \,. \tag{31}$$

Nous avons dit il y a un instant que "les lois de la mécanique sont les mêmes ..." ; on aimerait évidemment que le principe de relativité englobe l'ensemble des lois physiques. Cependant, les lois de l'électromagnétisme, formalisées en 1873 par Maxwell, semblent être incompatibles avec ce principe. Par exemple, les équations de Maxwell impliquent l'existence d'ondes électromagnétiques (dont la lumière est un cas particulier) et donnent pour ces ondes une vitesse de propagation c bien déterminée et unique. Or la transformation de Galilée (31) a pour conséquence la loi bien connue de composition des vitesses

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{V} \,, \tag{32}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du mobile dans $\mathcal{R}$ et $\vec{v'}$ sa vitesse dans $\mathcal{R}'$. Selon cette loi, la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques devrait dépendre du référentiel choisi pour les analyser.

Or les tentatives pour mettre en évidence expérimentalement l'influence du mouvement de la Terre autour du Soleil sur la vitesse de la lumière échouèrent systématiquement (Michelson, 1881 ; Michelson et Morley, 1887). Einstein eut alors (1905) l'audace extraordinaire de poser le postulat suivant, qui reprend le principe de relativité comme fondement premier de la théorie : *la vitesse de la lumière dans le vide est la même, c, dans tous les référentiels galiléens*. Ce postulat remet évidemment en cause la mécanique newtonienne, ne serait-ce qu'à travers la loi de composition des vitesses (32). Il faut donc d'emblée modifier la définition des référentiels galiléens pour ne

---

(15) Il paraissait alors évident que le temps, lui, était absolu, c'est-à-dire le même dans tous les référentiels.

plus la fonder sur les trois lois de Newton,mais seulement sur la première, c'est-à-dire sur le "le principe d'inertie" de Galilée : dans un référentiel galiléen (ou "d'inertie"), tout corps qui n'est soumis à aucune influence ou action de la part d'autres corps est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, ou reste au repos. En outre, le passage d'un référentiel d'inertie à un autre n'obéit plus à la transformation de Galilée (31) ; il est en particulier facile de montrer que *la notion de temps absolu est incompatible avec le postulat d'Einstein*.

On raisonnera donc en termes d'*événements* : dans le référentiel $\mathcal{R}$, le mobile passe au point de coordonnées x,y,z à l'instant t ; ce même événement se produit, dans le référentiel $\mathcal{R}'$, au point de coordonnées x',y',z' et à l'instant t'. Les relations donnant x',y',z', t' à partir de x, y, z, t et de la vitesse $\vec{V}$ de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ constituent la *"transformation de Lorentz"*(16) : si nous prenons pour simplifier O'x',O'y',O'z' respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz et $\vec{V}$ dirigée suivant Ox, les formules de Lorentz s'écrivent

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ ,\ y' = y\ ,\ z' = z\ ,\ t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ . \qquad (33)$$

Notons que, malgré des différences évidemment fondamentales, la transformation de Lorentz se réduit à celle de Galilée dans la limite où c peut être considérée comme infinie.

b - L'invariance relativiste et l'espace-temps de Minkowski.

Les lois de la physique doivent maintenant être invariantes, non seulement dans les transformations d'espace comme au paragraphe I, mais en outre dans les changements de référentiels galiléens. L'ensemble des rotations et des transformations de Lorentz de vitesse $\vec{V}$ quelconque constitue un groupe, dit *"groupe de Lorentz"* ; lorsqu'on inclut les translations dans l'espace et dans le temps, on obtient le *"groupe de Poincaré"*.

(16) C'est en 1892 que Lorentz imagina, pour "expliquer" le résultat négatif des expériences de Michelson et Morley, une "contraction des longueurs" dans la direction du mouvement. Les formules qu'il proposa, avec réticence car il restait farouchement partisan du temps absolu, furent prises au sérieux par H.Poincaré, qui montra en 1904 qu'elles préservent la forme des équations de Maxwell. Einstein entra en scène l'année suivante, mais en développant sa propre logique, profondément originale.

Un événement objectif possède, dans un référentiel galiléen déterminé, quatre *coordonnées d'espace-temps*, que l'on note[17] x^μ, avec μ= 0,1,2 ou 3 [18] :

$$x^1 = x\,,\ x^2 = y\,,\ x^3 = z\,,\ x^0 = ct. \qquad (34)$$

Les coordonnées x'^μ de ce même événement dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ [19] sont de la forme

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + X^\mu \qquad (35)$$

(avec la convention de sommation sur les indices répétés), où X^μ (μ=0,1,2,3) désigne quatre paramètres de translation dans l'espace et dans le temps, et la matrice 4x4 Λ représente une transformation du groupe de Lorentz. Ces transformations conservent la forme quadratique

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \qquad (36)$$

(C'est évident pour les rotations, et facile à vérifier pour la transformation de Lorentz "pure" (33)). La forme quadratique conservée (36) n'étant pas définie positive, l'espace-temps de Minkowski, qui a pour "points" les événements, n'est *pas euclidien*. Si l'on introduit le *tenseur métrique* $g_{\mu\nu}$, de composantes

$$g_{00} = +1\,,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1\,;\ g_{\mu\nu} = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu\,, \qquad (37)$$

la forme quadratique conservée s'écrit de façon compacte, en notation quadridimensionnelle,

---

(17) Il faut distinguer ici entre indices contravariants, que l'on note en position supérieure, et indices covariants, inférieurs. Nous n'expliciterons pas cette distinction (voir cependant la note 24), mais placerons correctement les divers indices dans les quelques formules qui suivent.

(18) Grâce au facteur c, homogène à une vitesse, la quatrième coordonnée x^0 a comme les autres la dimension d'une longueur. D'après le postulat d'Einstein, ce facteur c est le même dans tous les référentiels galiléens.

(19) Nous adoptons ici implicitement un point de vue passif pour les changements de référentiel (cf § I-2). Le point de vue actif correspondant peut aussi être développé.

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu . \qquad (38)$$

Les matrices 4 x 4 Λ associées aux transformations du groupe de Lorentz doivent donc vérifier[20]

$$\Lambda^T G \Lambda = G , \qquad (39)$$

où G est la matrice 4 x 4 d'éléments $g_{\mu\nu}$ et Λ^T la transposée de Λ.

Comme on le faisait dans l'espace à trois dimensions de la mécanique classique, on va classer ici les grandeurs physiques selon la manière dont elles se transforment dans les changements de référentiel galiléen.

Certaines grandeurs gardent dans $\mathcal{R}'$, au point (x',y',z') et à l'instant t' transformés de (x,y,z,t), la valeur qu'elles avaient dans $\mathcal{R}$ en (x,y,z,t) ; de telles grandeurs sont des *scalaires* (on dit souvent *"scalaires de Lorentz"* pour les distinguer des scalaires de l'espace à trois dimensions, invariants dans les seuls changements d'axes spatiaux). D'autres grandeurs sont des *"quadrivecteurs"*. Elles ont alors quatre composantes, notées a^μ, avec μ = 0,1,2 ou 3, les trois dernières a^i (i = 1,2,3) étant les composantes cartésiennes d'un vecteur $\vec{a}$ de l'espace à trois dimensions (appelé évidemment "trivecteur"). Les composantes a^μ d'un quadrivecteur *ne changent pas dans une translation d'espace ou de temps* ; dans les rotations d'espace et les transformations de Lorentz, elles *se transforment comme les coordonnées d'un événement :*

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, a^\nu . \qquad (40)$$

Il existe également des *grandeurs tensorielles*, dont les formules de transformation font intervenir plusieurs fois la matrice Λ : un tenseur du second ordre $T^{\mu\nu}$, par exemple, se transforme selon

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho\, \Lambda^\nu{}_\sigma\, T^{\rho\sigma} . \qquad (41)$$

---

(20) L'invariance de la forme quadratique (38) implique en effet que, pour tout événement x^μ,
$x'^\mu g_{\mu\nu} x'^\nu = \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma = x^\rho g_{\rho\sigma} x^\sigma$, ce qui donne $\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$.

Donnons quelques exemples. L'impulsion $\vec{p}$ et l'énergie E totales d'un système constituent un *quadrivecteur impulsion-énergie* p^μ, de composantes $(E,\vec{p}c)$; la *charge électrique* q d'une particule est une grandeur *scalaire*, mais la densité volumique de charge ρ d'une distribution continue fait partie, avec la densité de courant $\vec{j}$, d'un *quadrivecteur courant* $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$. De même les potentiels scalaires U et vecteur $\vec{A}$ décrivant un champ électromagnétique forment un *quadrivecteur potentiel* $A^\mu = (U/c, \vec{A})$. En revanche, le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$, que l'on déduit des potentiels U et $\vec{A}$ par les formules (bien connues en électromagnétisme)

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} \ , \ \vec{E} = - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U - \partial\vec{A}/\partial t \ , \tag{42}$$

sont en relativité les six composantes d'un *tenseur antisymétrique du second ordre* $F^{\mu\nu}$. En effet, les formules (42) s'écrivent, en notation quadri-dimensionnelle

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu \quad , \tag{43}$$

de sorte que les composantes de $F^{\mu\nu}$ s'explicitent comme suit[21]

$$\{F^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{44}$$

Le *produit scalaire* de deux quadrivecteurs a^μ et b^μ, défini à l'aide du tenseur métrique :

$$a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu \quad , \tag{45}$$

(21) En comparant les formules (43) et (42), on trouve facilement que $F^{i0} = - F^{0i} = E^i$ (i = 1,2,3), $F^{ij} = - F^{ji} = - \varepsilon^{ijk}B^k$ (i,j,k,=1,2 ou 3).

est effectivement un scalaire, c'est-à-dire une grandeur invariante dans toutes les transformations du groupe de Lorentz. Par exemple, le "carré scalaire" du quadrivecteur impulsion-énergie d'une particule libre permet de *définir sa masse* m, qui est ici aussi un *scalaire* (22) :

$$p^{\mu} g_{\mu\nu} p^{\nu} = E^2 - \vec{p}^{\,2} c^2 = m^2 c^4. \qquad (46)$$

Il existe ici aussi deux tenseurs invariants (et deux seulement) : le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, déjà introduit, et le tenseur totalement antisymétrique d'ordre quatre $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$:

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ si deux indices prennent la même valeur ;
$= +1$ si (μ,ν,ρ,σ) est une permutation paire de $(0,1,2,3)$;
$= -1$ si (μ,ν,ρ,σ) est une permutation impaire de $(0,1,2,3)$. (47)

Signalons pour terminer (23) que les scalaires de Lorentz et les quadrivecteurs se divisent en deux catégories, selon leur comportement dans *l'opération de "parité"*, définie par

$$x' = -x \;,\; y' = -y \;,\; z' = -z \;,\; t' = +t\,. \qquad (48)$$

Les *vrais scalaires* restent invariants dans cette opération, les *pseudoscalaires* changent de signe ; un *vrai quadrivecteur* v^{μ} se comporte comme les coordonnées d'un événement, c'est-à-dire

$$v'^{i} = -v^{i} \; (i=1,2,3) \;;$$
$$v'^{0} = +v^{0}\,, \qquad (49)$$

---

(22) Cette masse, qui peut être nulle (c'est le cas pour le photon, par exemple), est une propriété intrinsèque de la particule. Il est préférable de ne pas introduire, comme le faisaient certains ouvrages un peu anciens, une masse qui varierait avec la vitesse de la particule, et qui coïnciderait en fait (au facteur c^2 près) avec son énergie E.

(23) Le calcul tensoriel prend une importance primordiale en "relativité générale", dont il constitue véritablement le langage. La relativité générale envisage les changements de référentiels généraux, sans se restreindre aux mouvements de translation uniforme. En mécanique classique déjà, l'égalité, pour un corps donné, entre sa "masse inerte" (celle qui apparaît dans la loi générale $\vec{F} = m\vec{\gamma}$) et sa "masse gravitationnelle", ou "pesante" (celle qu'introduit la force d'attraction gravitationnelle $|\vec{F}_G| = Gmm'/r^2$), permet que les effets d'un champ gravitationnel puissent être exactement compensés par les "pseudoforces", ou "forces d'inertie", qui apparaissent dans un référentiel accéléré : c'est le cas dans un satellite

un *quadrivecteur axial* a^μ de façon exactement opposée :

$$a'^i = + a^i \ (i=1,2,3) \ ; \qquad a'^0 = - a^0 . \qquad (50)$$

On montre facilement que, si v^μ, w^μ, y^μ sont de vrais quadrivecteurs, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\nu w_\rho y_\sigma$ est un quadrivecteur axial (24), et $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} v_\mu w_\nu y_\rho z_\sigma$ un pseudoscalaire si z^μ est un autre vrai quadrivecteur.

*

* *

Quelques mots en guise de conclusion. Cet article ne cherche à attaquer ni à culpabiliser personne. Il ne cherche même pas à démontrer ou illustrer une quelconque thèse. Il tente simplement une mise au point sur des notions qui ne sont pas toujours perçues clairement, même par certains physiciens : on peut utiliser quotidiennement les vecteurs et les lois de la physique sans avoir eu le temps de réfléchir sur la signification de leurs propriétés d'invariance, ou de covariance, dans les transformations d'espace ou les changements de référentiels. Quant aux mathématiciens, ils sauront, je l'espère, "en prendre et en laisser". Je tiens en tout cas à remercier les responsables du *Bulletin* de l'A.P.M.E.P. pour m'avoir ouvert ses colonnes.

---

artificiel, où règne ce que l'on appelle improprement "l'état d'apesanteur". En proposant d'identifier physiquement forces gravitationnelles et forces d'inertie liées à l'accélération du référentiel ("principe d'équivalence"), Einstein fit de sa "théorie de la relativité générale" une théorie de la gravitation compatible avec le principe de relativité, dans laquelle l'égalité entre masse inerte et masse pesante devient une évidence.

(24) Les composantes covariantes v_μ d'un quadrivecteur sont obtenues à l'aide du tenseur métrique : $v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$, de sorte que $v_0 = + v^0$, $v_i = - v^i$ (cf formules (37)).