Isométries du plan en Terminale C ou E

Gaspard Macia

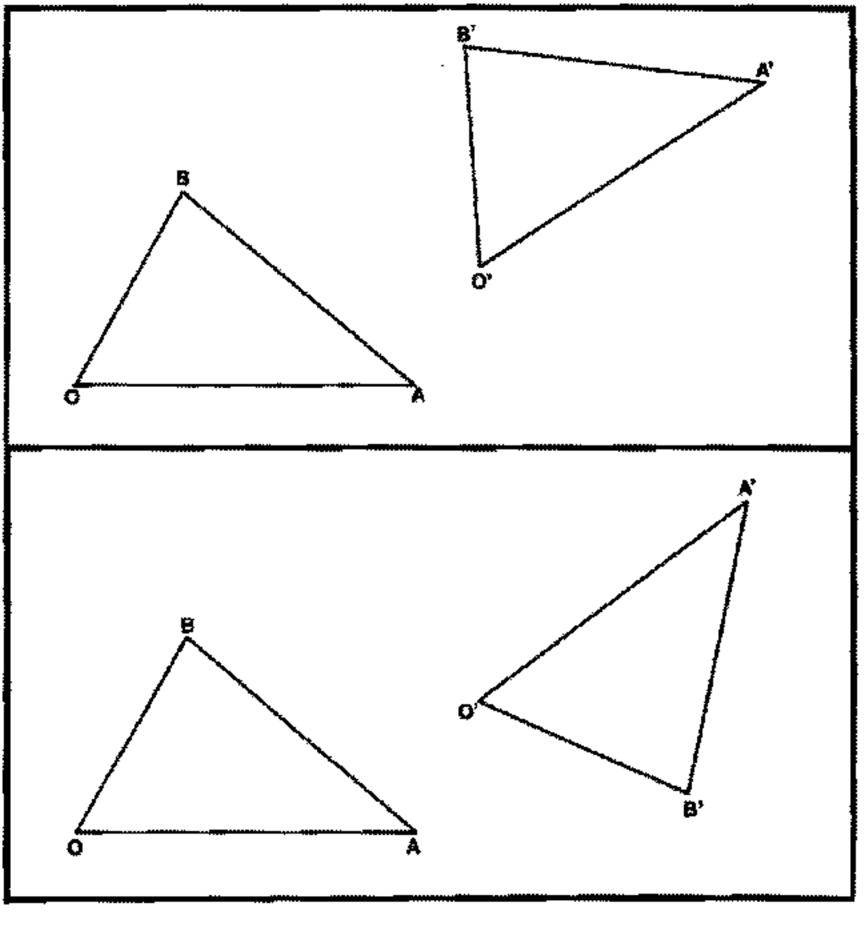
Lycée P.Langevin - Martigues.

Au départ des quelques lignes qui suivent, le but recherché était de donner un support visuel à la propriété :

"Etant donné un point O, une isométrie se décompose de manière unique en $f = tou$, où u est une isométrie fixant O et t une translation".

et si possible d'amener les élèves à énoncer en partie cette propriété.

Pour ce faire, quelques figures sont proposées aux élèves, en particulier celles reproduites ici (voir page suivante), et on leur demande "d'amener" à l'aide des transformations du plan étudiées en Première, les points O, A et B respectivement en O', A' et B'.



Première remarque : Cette formulation suppose implicitement que :

"Si les points O, A, B, O', A', B' satisfont aux conditions suivantes :
◊ O, A et B ne sont pas alignés,
◊ O'A' = OA, O'B' = OB, A'B' = AB,
alors il existe une isométrie et une seule transformant O en O', A en A' et B en B'."

J'ai donc au préalable démontré dans le cours que toute isométrie conserve le produit scalaire et le barycentre, la première propriété servant à établir la seconde, puis demandé de faire l'exercice :

> Soit O, A, B, O', A', B' des points satisfaisant aux conditions suivantes : ◊ O, A et B ne sont pas alignés,
> ◊ O'A' = OA , O'B' = OB , A'B' = AB.
>
> 1 . Démontrer que O', A' et B' ne sont pas alignés (on rappelle qu'un point C n'appartient pas à une droite (AB) si et seulement si $AB \neq AC + BC$ et $AB \neq |AC - BC|$).
>
> 2 . Démontrer que s'il existe une isométrie f transformant O, A et B respectivement en O', A' et B', alors f est l'application qui à tout point M de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ associe le point M' de coordonnées (x,y) dans le repère $(O', \overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'})$(on pourra utiliser la caractérisation barycentrique du plan).
>
> 3 . Soit g l'application qui à tout point M de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ associe le point M' de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$). Démontrer que :
>
> a - O' = g(O), A' = g(A) , B' = g(B).
>
> b - $\overrightarrow{O'A'}.\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.
>
> c - Quels que soient les points M et N d'images respectives M' et N' par g, M'N' = MN (en désignant par (x,y) les coordonnées de M et (z,t) celles de N dans le repère $(O',\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'})$ on pourra établir que
> $MN^2 = (z - x)^2OA^2 + (t - y)^2OB^2 + 2(z - x)(t - x)\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$
> et un résultat analogue pour $M'N'^2$).
>
> d - g est bijective.
>
> Que peut-on dire de l'application g ?
>
> 4 . Résumer l'étude précédente sous forme d'un théorème.

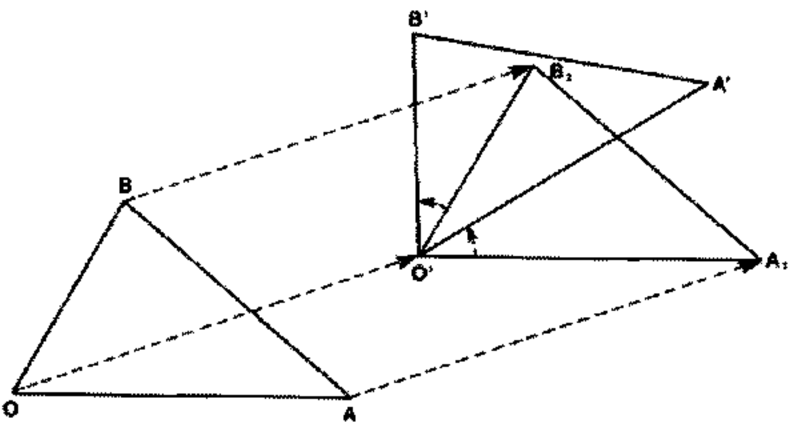
Conséquences immédiates de l'exercice :

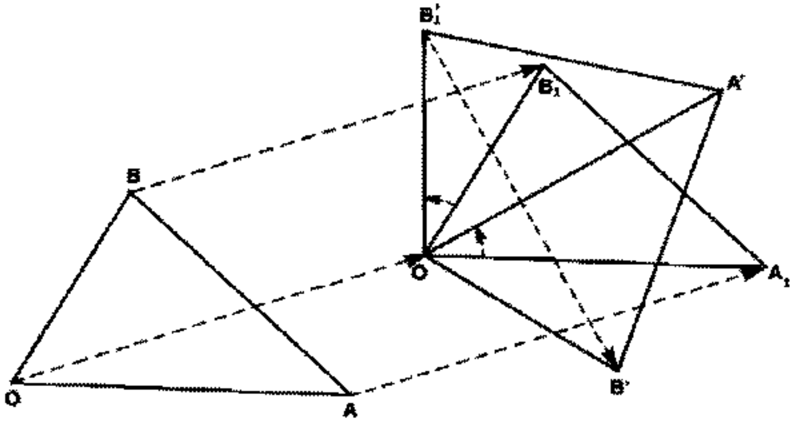
- Toute isométrie est déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images.

- Si f est une isométrie, alors l'image d'un repère $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est un repère $(O',\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'})$, tout point M de coordonnées (x,y) dans $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ a pour image le point M' de coordonnées (x,y) dans $(O',\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'})$.

Deuxième remarque :

Revenons à l'objectif fixé au début, désignons par f l'isométrie qui transforme O, A et B respectivement en O', A' et B'. Il semble que la démarche la plus naturelle consiste à transformer par exemple O en O' à l'aide de la translation t de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. On construit alors $A_1 = t$ (A) et $B_1 = t$ (B). Puis l'on transforme par exemple A_1 en A' à l'aide de la rotation r de centre O' et d'angle $(\overrightarrow{O'A_1},\overrightarrow{O'A'})$. On construit $B'_1 = r\ (B_1)$. On constate sur la figure 1 que $B'_1 = B'$. Dans ce cas, rot est une isométrie qui transforme O, A, B respectivement en O', A', B' et donc $f = rot$, r étant une isométrie fixant O'. Sur la figure 2, on transforme B'_1 en B' à l'aide de la réflexion s d'axe (O'A'). Dans ce cas, $sorot$ est une isométrie qui transforme O, A, B respectivement en O', A', B', et donc $f = sorot$, sor étant une isométrie fixant O'.





Par suite, on peut conjecturer que :
Etant donné un point O, une isométrie f se décompose en $f = u \circ t$ où, en posant $O' = f(O)$, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ et u une isométrie fixant O'.

Pour la suite du cours : classification des isométries, il suffit de démontrer cette conjoncture et y ajoutant l'unicité de la décomposition.