La classe de maths au jour le jour

Autour d'un problème ouvert posé en 1ère S

Marie Paule AGUIE
Gilbert GRIBONVAL(*)

Ce compte rendu d'une situation vécue en classe met en évidence :
- l'attrait des problèmes ouverts pour les élèves
- l'intérêt de se parler entre collègues ;
- comment la géométrie dans l'espace peut parfois venir au secours de la géométrie plane.

Je pose très souvent des problèmes "ouverts" dans le premier cycle comme dans le second, dans de "bonnes" classes, comme dans de moins bonnes :
- question posée sans imposer de méthode,
- figure à étudier sans question posée (les élèves doivent conjecturer puis confirmer ou infirmer leurs conjectures).
Ce type d'exercice n'est pas proposé en contrôle.

(*) Marie Paule AGUIE pour le travail avec les élèves,
Gilbert GRIBONVAL pour les façons de voir le théorème de PAPPUS.

Dans tous les cas, après 5 ou 10 minutes de réflexion, les idées fusent, la discussion entre élèves et entre professeur et élèves s'installe, les démonstrations se mettent en forme. Les élèves peuvent travailler seuls ou en groupes. J'interviens à la demande quand la discussion est amorcée. Je vais éventuellement donner une indication aux groupes qui "sèchent" pendant un laps de temps trop long.

L'exercice proposé ici :

> *"On donne deux droites D_1 et D_2 se coupant en un point O situé en dehors de la feuille et un point M non situé sur les deux droites. Tracer (OM)."*

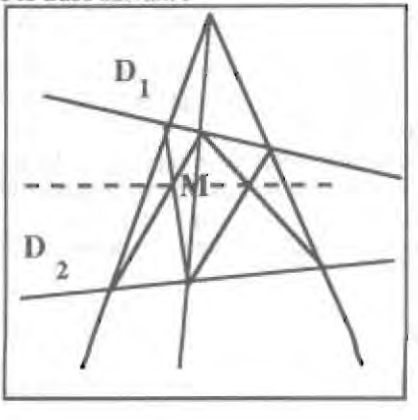
a été donné à une classe de 1ère S de 37 élèves au troisième trimestre. Le problème a été posé 10 minutes avant la fin d'une séance. Au cours des séances précédentes, il avait été question de transformations.

Des élèves ont eu très vite une idée, mais aucun n'a eu le temps d'effectuer ni de justifier le tracé. Ils ont eu à réfléchir jusqu'au cours suivant.

Dès le début de la nouvelle séance, plus de la moitié des élèves désiraient faire part de leurs trouvailles. Toutes leurs solutions utilisaient les transformations : symétries diverses, homothéties. Chacun a justifié sa construction. Les différentes méthodes ont été critiquées.

Ils se sont alors tournés vers moi pour voir si je pouvais proposer autre chose. Je leur ai donné la méthode "de l'orthocentre". Puis j'ai demandé s'il n'y avait vraiment aucune autre proposition. Un élève a levé timidement le doigt pour dire qu'il y avait "quelque chose qui semblait marcher mais qu'il n'avait pas su le démontrer". "Oh! alors ..." ont dit les autres avec un sourire sceptique.

L'élève appelé au tableau a proposé le tracé suivant :



Le dessin fait au tableau "à main levée" n'étant pas très convaincant, l'élève étant incapable de justifier sa construction, le reste de la classe a pensé que c'était "par hasard que ça avait marché".

J'ai fait alors refaire une figure "propre" par chacun d'entre eux et tous ont dû convenir qu'il y avait de fortes présomptions pour que la méthode soit effectivement correcte. Il restait à en donner une démonstration.

Fin de séance : chacun cherche pour la prochaine fois une éventuelle justification.

Je ne vois, quant à moi, que la réciprocité polaire. C'est un thème qui pourrait se traiter en 1ère S, mais qui est hors programme et long à développer.

Je fais alors part de mes soucis à un groupe de collègues. L'un d'entre eux, Gilbert GRIBONVAL, me rappela alors que le résultat à justifier était le théorème de PAPPUS, et comment on peut le justifier sans divisions harmoniques, ni pôles et polaires.

1) A partir du théorème de DESARGUES, lui-même obtenu à partir d'une figure de l'espace :
◊ La figure ci-dessous représente trois droites α, β, γ de l'espace, concourantes en S.

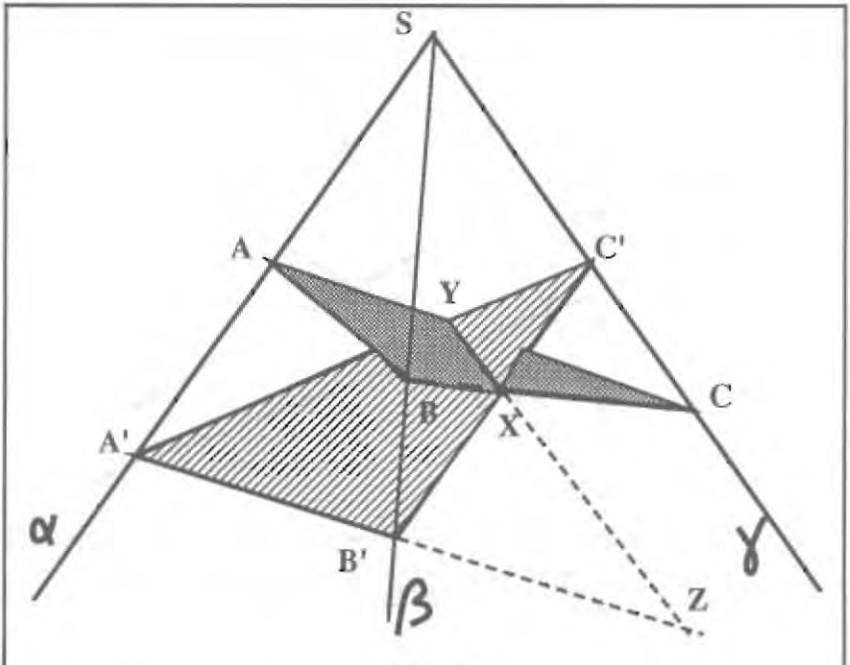


Figure 1

On coupe la figure par un premier plan pour obtenir la section "hachurée" A'B'C', et par un deuxième plan pour obtenir la section "grisée" ABC. L'intersection des deux plans est une droite Δ.

Les droites (AB) et (A'B') sont coplanaires et se coupent donc en Z. Z est alors dans le plan "grisé" et dans le plan "hachuré", donc sur Δ.
De la même façon, X et Y sont sur Δ.
X, Y et Z sont donc alignés.

◊ La "vision" plane de ce résultat, c'est-à-dire la projection dans un plan, de la figure précédente, donne alors le théorème de DESARGUES.

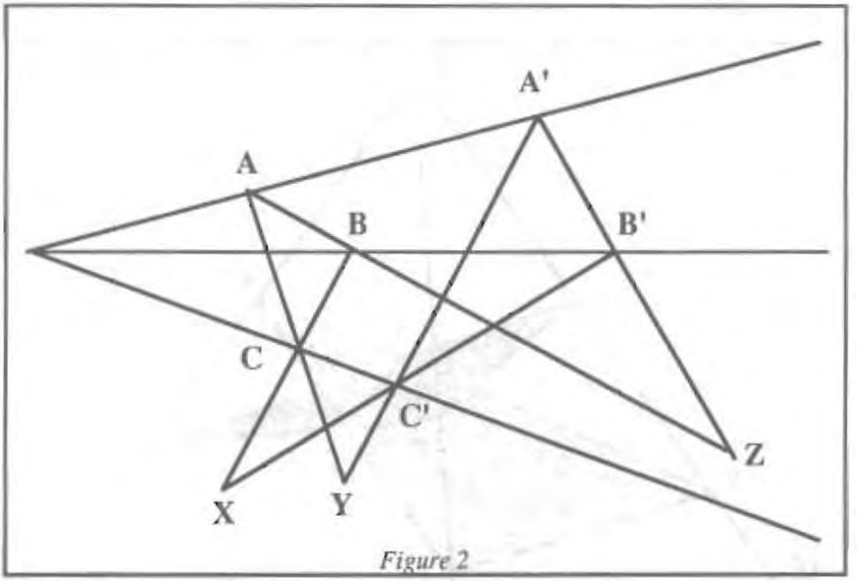
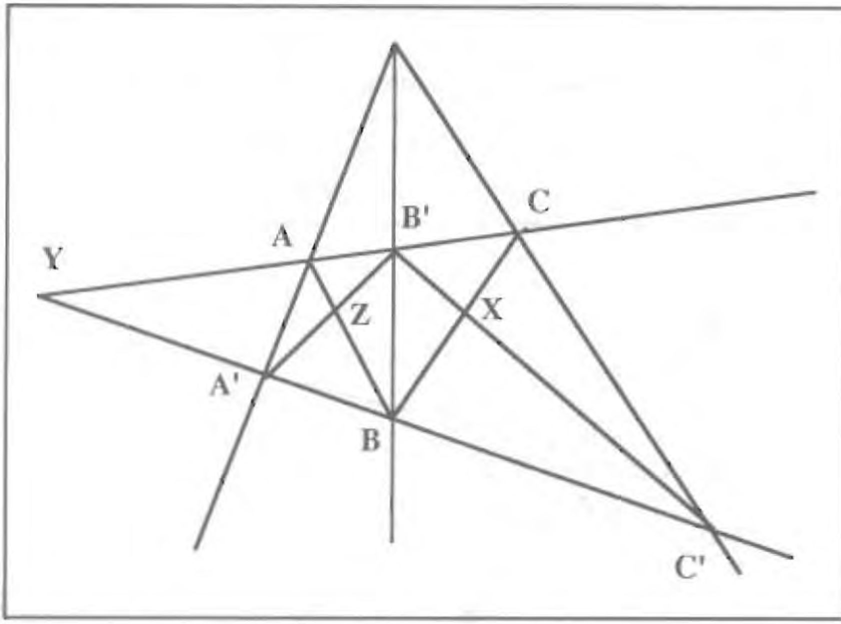


Figure 2

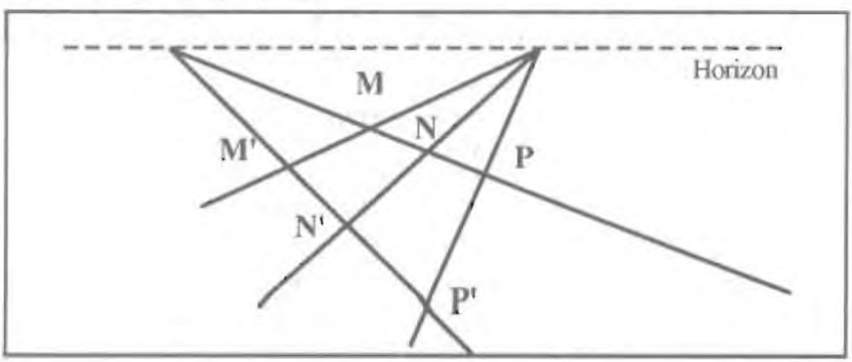
(AA'), (BB'), (CC') concourantes ⇔ X, Y, Z alignés.

◊ Un cas particulier de la figure 2 est celui où B' est sur (AC), et B est sur (A'C'). On a alors la section de trois droites concourantes par deux droites et on obtient le théorème de PAPPUS :



(AA'), (BB'),(CC') concourantes A, B', C alignés A', B, C' alignés	⇒	X, Y, Z alignés

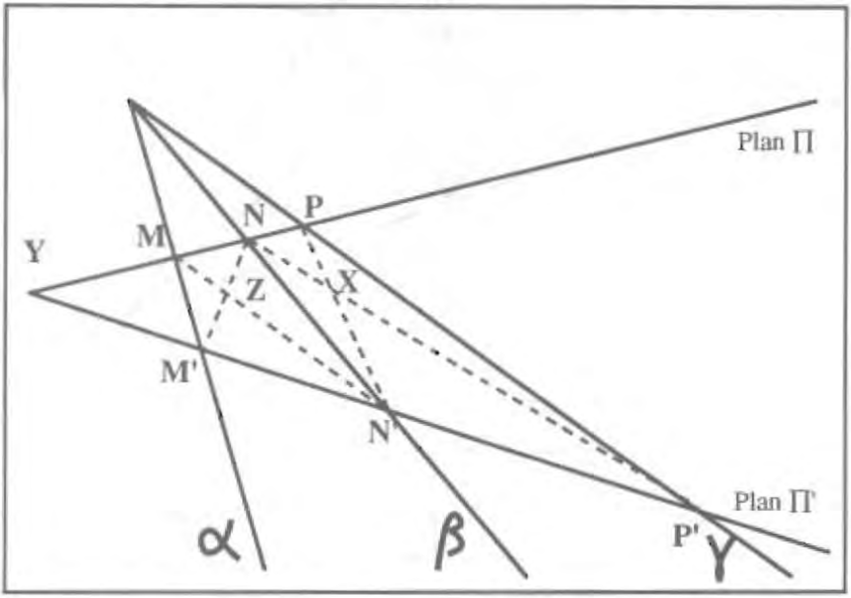
2) Avec un peu de perspective :



La figure ci-dessus est la vue, en perspective, de la section de trois droites parallèles (MM'), (NN'), (PP'), par deux droites parallèles.

Les centres des parallélogrammes MNN'M' et NPP'N' sont sur une même parallèle à (MNP) (et à (M'N'P')). La droite joignant les centres des parallélogrammes précités rencontre donc (MNP) et (M'N'P') sur l'horizon.

3) Et encore une intervention de la géométrie dans l'espace :



Cette figure plane peut être envisagée comme la projection parallèlement à l'intersection des plans Π et Π', de la section des trois droites α, β, γ concourantes en S.

L'intersection des deux plans MN'P et M'NP' contient :

(MN') ∩ (M'N) = Z
(NP') ∩ (N'P) = X
(MP) ∩ (M'P') = Y
Les points X, Y, Z sont donc alignés.

La démonstration de l'alignement des points X, Y, Z de la figure 1 ainsi que l'application au cas particulier de la configuration de théorème de PAPPUS sont très bien passés auprès des élèves. Cela nous a permis de réinvestir des connaissances de géométrie dans l'espace. La partie concernant la géométrie projective a été admise. Je n'ai pas proposé le théorème de PAPPUS par perspective pour ne pas trop faire "traîner" le problème et ne pas faire trop de développement hors programme.

A partir de cet exercice j'ai pu, encore une fois, constater tout ce que peut apporter un problème "ouvert" :
- Il est agréable de chercher,
- Les différentes personnalités peuvent s'exprimer ; chacun choisit sa méthode suivant ses goûts,
- Les moins rapides et les moins "scolaires" ont aussi une chance de trouver quelque chose d'intéressant ; l'élève qui a proposé la dernière méthode était un élève moyen (Je ne sais pas s'il l'a trouvée seul ou s'il s'est fait aider par ses parents. Dans ce dernier cas, l'exercice a permis d'instaurer un dialogue entre un adolescent et sa famille et c'est déjà positif!)
- Les élèves apprennent à faire un choix parmi leurs connaissances.
- Les élèves doivent aller jusqu'au bout de leur démonstration,
- L'élève sent la nécessité d'une démonstration (il a les copains et le professeur à convaincre),
- Les élèves sont obligés de s'écouter les uns les autres, de se faire comprendre ; il doivent donc s'exprimer clairement,
- Les élèves doivent faire preuve d'esprit critique tant vis à vis des camarades que vis à vis d'eux-mêmes,
- Réinvestissement de connaissances (géométrie dans l'espace à cette occasion),
- Décloisonnement entre les différentes parties du programme,
- On se rend compte après de telles activités que les élèves peuvent faire des maths pour le plaisir, peuvent être rigoureux et qu'ils ont beaucoup plus d'idées qu'on le croit généralement.

Cet exercice précis m'a permis d'aborder des sujets que l'on n'aborde pas si l'on s'en tient strictement au programme. De temps en temps, cela paraît intéressant. (Je signale bien aux élèves qu'il s'agit de questions hors programme ; ils n'en sont, j'ai l'impression, que plus intéressés).

J'ai eu, grâce à cet exercice, des échanges très intéressants avec mes collègues : l'un d'eux m'a remis en mémoire les théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS, et d'autres m'ont fait connaître les publications de l'APMEP traitant de ce problème, publications que je ne connaissais pas quand je l'ai proposé à ma classe (honte à moi!).

Donner de temps à autre un problème "ouvert" dans ses classes rompt la monotonie des mécanismes qui font faire un problème traditionnel, tient l'esprit en éveil, fait voir la classe d'un œil différent. C'est bien agréable!