Les Problèmes de L'A.P.M.E.P

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes" ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

M.Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 Limoges

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

ENONCES

ÉNONCÉ N°178 (Michel LAFOND , Dijon)

Si $[x]$ désigne la partie entière de x , montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i} \right] - [\sqrt{n}]$ est un entier pair.

ÉNONCÉ N°179 (Raymond RAYNAUD , Digne)

Que dire d'une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $f(n+1) > f \circ f(n)$?

ÉNONCÉ N°180 (Georges COLLOMBAT, Chambéry)

Quel est le nombre de façons de placer les deux rois sur un échiquier ? (Ils ne sont pas en échec et il n'y a pas d'autre pièce).

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°161 (I.CHARYGUINE, Moscou)

Montrer qu'un système d'équations

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$
$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 1$$

aux coefficients a_i , b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) réels arbitraires possède au moins une solution telle que $\max_i x_i \geq \sqrt{2} - 1$

SOLUTION (Jean BERRARD , Paris)

1) Remarquons d'abord qu'une solution pour laquelle $\max_i x_i$ est aussi grand que possible est telle que l'une des inconnue x_i est nulle. En effet, le système s'interprète comme étant l'intersection d'un hyperoctaèdre avec deux hyperplans passant par son centre. Cette intersection se projète sur un plan selon un octogone, et le maximum des x_i est réalisé en un de ses sommets. Une autre façon de le voir est de considérer une interprétation barycentrique plane : l'origine doit être barycentre de trois seulement des quatre points de coordonnées $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ $1 \leq \iota \leq 4$.

2) Considérons alors les vecteurs $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ supposés non nuls et de directions distinctes. A chaque triplet (i , j , k) d'indices, il correspond une solution : $x_i = \dfrac{\delta_{jk}}{D}$, $x_j = \dfrac{\delta_{ki}}{D}$, $x_k = \dfrac{\delta_{ij}}{D}$, $x_l = 0$

avec $\delta_{jk} = \begin{vmatrix} a_i\, a_j \\ b_i b_j \end{vmatrix}$, etc ... , et $D = |\delta_{ij}| + |\delta_{ik}| + |\delta_{jk}|$

Cette solution réalise $|x_i| \geq \sqrt{2}$ - 1 si et seulement si

$$\sqrt{2}\,|\delta_{jk}| \geq |\delta_{ij}| + |\delta_{ik}|$$

Or on vérifie sur la définition des δ_{ij} l'égalité :

$$\delta_{12}\,\delta_{34} + \delta_{13}\,\delta_{42} + \delta_{14}\,\delta_{23} = 0$$

l'un de ces trois produits est donc *en valeur absolue* la somme des deux autres.

3) Il s'agit donc, à partir d'une relation du type $a\,a' + b\,b' = c\,c'$ *entre nombres positifs* d'obtenir une inégalité du type $c\sqrt{2} \geq a + b$. Compte tenu de l'inégalité $2\left(a^2 + b^2\right) \geq (a+b)^2$, il suffira de prouver que $c^2 \geq a^2 + b^2$.

Montrons que (1) : $a\,a' + b\,b' = c\,c'$ implique bien $c^2 \geq a^2 + b^2$ ou $c^2 \geq a'^2 + b'^2$ ou $c'^2 \geq a'^2 + b^2$ ou $c'^2 \geq a^2 + b'^2$.

Pour cela, remarquons que (1) implique :

(2) $c^2 \geq \dfrac{(a\,a' + b\,b')(a\,b' + b\,a')}{a\,b + a'b'}$ et (3) $c'^2 \leq \dfrac{(a\,a' + b\,b')(a\,b + a'b')}{a\,b' + b\,a'}$

ou

(4) $c^2 \leq \dfrac{(a\,a' + b\,b')(a\,b' + b\,a')}{a\,b + a'b'}$ et (5) $c'^2 \geq \dfrac{(a\,a' + b\,b')(a\,b + a'b')}{a\,b' + b\,a'}$

(2) s'écrit : $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{a\,b} + \dfrac{a'^2 + b'^2 - c^2}{a'b'} \leq 0$ donc l'un au moins de ces rapports est négatif : $c^2 \geq a^2 + b^2$ ou $c^2 \geq a'^2 + b'^2$. De même (5) entraîne $c'^2 \geq a'^2 + b^2$ ou $c'^2 \geq a^2 + b'^2$.

- cqfd -

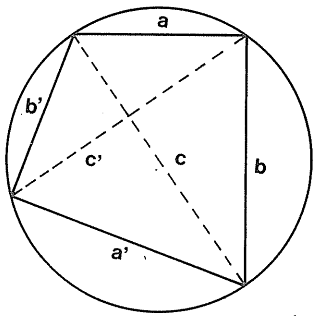
Autres solutions : André ANGLÉS et Gabrielle VÉRÉNAS (Limoges), Bernard HÉRON et Alain MASSON (La Rochelle) , François LO JACOMO (Paris), Charles NOTARI (Noë).

Note : L'auteur de l'ingénieuse solution ci-dessus précise les raisons qui l'ont conduit aux expressions qui apparaissent dans ces calculs :

Si a, a ', b , b ' mesuraient les côtés d'un quadrilatère inscriptible, chaque couple d'angles opposés contiendrait un angle droit ou obtus, et les mesures c , c ' des diagonales répondraient à la condition, que les angles opposés soient deux à deux supplémentaires, donc que la somme de leurs cosinus est nulle soit : $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a\,b} + \dfrac{a'^2 + b'^2 - c^2}{2a'b'} = 0$.

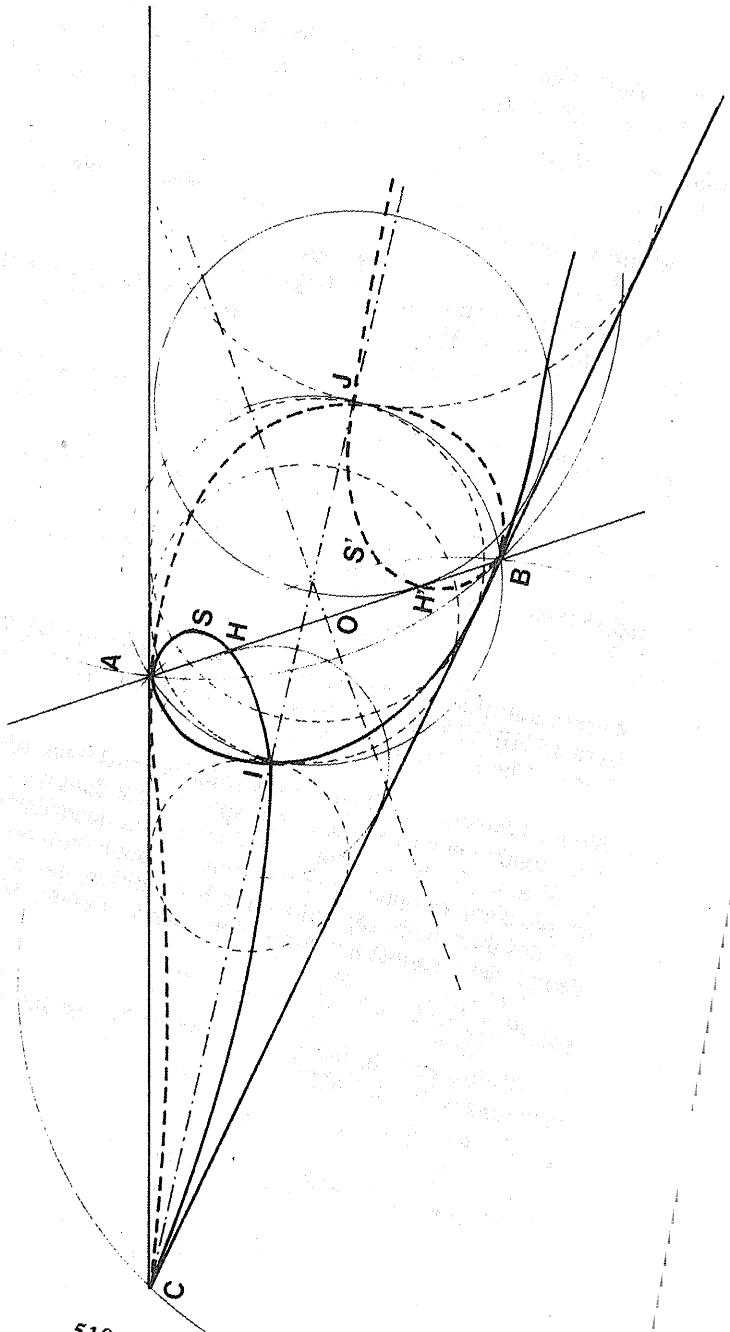
D'autre part, le fait que le quadrilatère est inscriptible se traduit par les relations de PTOLÉMÉE : $c\,c' = a\,a' + b\,b'$

et $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{a\,b' + a'b}{a\,b + a'b'}$ *(figure 1)*



d'où l'on tire $c^2 = \dfrac{(a\,a' + b\,b')(a\,b' + b\,a')}{a\,b + a'b'}$

et $c'^2 = \dfrac{(a\,a' + b\,b')(a\,b + a'b')}{a\,b' + b\,a'}$

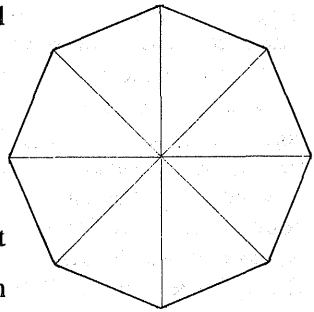

J
S'
B
H'
O
S
H
A
I
C

Remarque : La borne $\sqrt{2} - 1$ est la meilleure possible, en effet, voici un système pour lequel ce minimum de $\max_i x_i$ est atteint :

$$x + y + z\sqrt{2} = 0$$
$$x - y + t\sqrt{2} = 0$$
$$|x| + |y| + |z| + |t| = 1$$

Ceci entraîne :

$$|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}|x + y| + \frac{1}{\sqrt{2}}|x - y| = 1$$ dont la représentation dans le plan (x , y) est un octogone régulier (*figure 2*) inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt{2} - 1$.



ÉNONCÉ n° 162 (V.PROTASSOV, Moscou)

Une circonférence passant par des points A et B rencontre les segments [AB] et [BC] en des points K et L respectivement. Une autre circonférence tangente aux segments [CK] et [CL] est tangente aussi à l'arc KL en un point M. Montrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ passe par le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

SOLUTION (Dominique ROUX, Limoges)

Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et J le centre du cercle exinscrit dans l'angle C.

On sait (cf J.LEMAIRE , *hyperbole équilatère et courbes dérivées*, Vuibert 1927, page 87) que le lieu des points d'où l'on voit les segments [IA] et [IB] sous des angles égaux ou supplémentaires est une strophoïde S_1 de point double I, passant par A et B, ainsi que par les points conjugués C et H, où H est la projection orthogonale de I sur [AB].

D'autre part, pour tout cercle *(C)* dont le centre est sur (IJ) et qui est tangent aux droites (CA) et (CB), il existe deux cercles du faisceau à points de base A et B qui lui sont tangents, en des points que l'on appellera M et M'. (Une inversion de pôle A, par exemple, ramène à la construction des deux tangentes à un cercle menées par un point donné). Un traitement analytique, qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer, conduirait par élimination entre des conditions de nature algébrique aux équations des lieux de M et de M' qui sont donc algébriques. Soit S_2 le lieu de M, S_2' celui de M'.

Le cercle de diamètre [IJ] passe par A et B. Quatre cercles *(C)* lui sont tangents : deux en I, deux en J, une fois intérieurement, une fois extérieurement. Supposons que le choix des notations soit tel que S_2 passe par I, et par suite S_2' passe par J. I est un point double de S_2, de même J est un point double de S_2'. Le degré de S_2 est donné par le nombre de ses points communs avec une droite. Prenons (IJ). Si (AB) n'est pas perpendiculaire à (IJ), les seuls points de (IJ) qui soient des points de contact d'un cercle *(C)* avec un cercle passant par A et B sont I, J et C (prendre *(C)* réduit au seul point C). Donc la droite (IJ) coupe S_2 au point double I et en C. (on aurait pu aussi choisir la droite (AB), ce qui donnait les trois intersections A, B et H). S_2 (et de même S_2') est une cubique, qui, de plus est circulaire car tous les cercles passent par les points cycliques. Son équation, dans un repère orthonormal d'origine I est de la forme :

$(x^2 + y^2)(ax + by) = (y - \alpha x)(y - \beta x)$ où a, b, α, β sont quatre réels à déterminer.

S_2 passe par A (prendre *(C)* tangent en A à (AC)) et de même par B. Enfin S_2 passe par H point de contact du cercle inscrit au triangle ABC avec l'axe radical (AB) du faisceau. (*figure 3*).

S_1 et S_2 sont deux cubiques circulaires, de même point double I, passant par A, B, C et H, donc coïncident, ce qui prouve le résultat.

Remarques :

S_2 est donc une strophoïde. De même S_2' est la strophoïde ensemble des points d'où l'on voit [JA] et [JB] sous des angles égaux ou supplémentaires. Considérons l'application f composé commutatif de l'inversion de pôle C, de puissance CA x CB par la symétrie orthogonale d'axe (IJ). Tout cercle ou droite passant par A et B est transformé en cercle ou droite passant par A et B, et tout cercle *(C)* est transformé en un cercle *(C)*. Cela permet de voir que f échange S_2 en S_2'.

On remarque aussi que S_2 et S_2' sont tangentes en A et B à (CA) et (CB).

Autres solutions :

André ANGLES et Gabriel VÉRÉNAS (Limoges), Jean BERRARD (Paris), Edgard DELPLANCHE (Créteil), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë) et une réponse fausse.

ÉNONCÉ N°163 (G.V.DOROFÉEV, Moscou)

Une application $f : n \to a_n$ de $\mathbb{Z}$ dans R vérifie les conditions:
$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n \geq 0$ et $a_n \geq \frac{1}{4}(a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n+1} + a_{n+2})$.

Montrer que f est constante.

SOLUTION de Xavier RELIQUET (Fès, Maroc).

1. Montrons que si (b_n), $n \in \mathbb{Z}$, vérifie

(i) $\quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad b_n \geq 0$ et $b_n \geq \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n+1})$, alors (b_n) est constante.

1.1 Supposons $b_0 \geq b_1$.
On a $b_1 \geq \frac{1}{2}(b_0 + b_2) \geq \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$
Donc $b_1 \geq b_2$ et, par récurrence, (b_n) est décroissante sur N. Or, $b_n \geq 0$. Donc la suite (b_n), $n \in$ N, est convergente.
D'autre part, $b_1 \geq \frac{1}{2}(b_0 + b_2)$ implique $b_1 - b_2 \geq b_0 - b_1$, et, par récurrence, $b_n - b_{n+1} \geq b_0 - b_1$..Quand n tend vers l'infini, on trouve $0 \geq b_0 - b_1$, et donc $b_0 = b_1$.

1.2 Supposons $b_0 \leq b_1$.
On se ramène au cas précédent en posant $c_n = b_{-n+1}$.
On obtient $c_0 = b_1$ et $c_1 = b_0$ et (c_n) verifie (i). Donc $b_0 = b_1$.

1.3 Supposons $b_k \geq b_{k+1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On se ramène au cas $k = 0$ en posant $c_n = b_{n+k}$. Donc $b_n = b_{n+k}$
En conclusion, si (b_n), $n \in \mathbb{Z}$ vérifie (i), elle est constante.

2. Montrons que si (a_n), $n \in \mathbb{Z}$, vérifie

(ii) $\quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n \geq 0$ et $a_n \geq \frac{1}{4}(a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n+1} + a_{n+2})$ .alors (a_n) est constante.

2.1 On pose $b_n = a_{n-1} + 3a_n + a_{n+1}$. Montrons que (b_n) est constante.
On a les équivalences :

$b_n \geq \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n+1})$

$\Leftrightarrow a_{n-1} + 3a_n + a_{n+1} \geq \frac{1}{2}(a_{n-2} + 3a_{n-1} + a_n + 3a_{n+1} + a_{n+2})$

$\Leftrightarrow 4a_n \geq a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n+1} + a_{n+2}$

(a_n) vérifie (ii). Donc (b_n) vérifie (i). Donc (b_n) est constante, soit $b = b_n$.

2.2 (a_n), $n \in \mathbb{Z}$, vérifie $a_{n-1} + 3a_n + a_{n+1} = b$. Montrons que (a_n) est constante.

L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 1 = b$.

Ses racines sont : $r_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

Donc $a_n = \frac{b}{5} + \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n \to \infty} r_2^n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} |r_1|^n = \infty$ *et* $r_1 < 0$.

Si α n'est pas nul, il existe n tel que $a_n < 0$. Donc α = 0.

De même, $\lim\limits_{n \to -\infty} r_1^n = 0$, $\lim\limits_{n \to -\infty} |r_2|^n = \infty$ *et* $r_2 < 0$.

Si β n'est pas nul, il existe n tel que $b_n < 0$. Donc β = 0.

On obtient donc $a_n = \frac{1}{5} b$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

En conclusion, si (a_n) vérifie (ii), alors elle est constante.

Autres solutions :
André ANGLES pour le Collège L.LIMOSIN (Limoges), Jean BERRARD (Paris), Gustave CHOQUET (Antony), Robert FERREOL (Paris), Serge GAIGNOUX (Montigny sur Vesle), Bernard HERON (Orsay), François LO JACOMO (Paris), Claude MORIN (Limoges), Charles NOTARI (Noë) et une réponse fausse.

ÉNONCÉ N°164 (S.KONIAGUINE, Moscou)

Montrer qu'il existe une partition $\{C_1, C_2, \dots, C_{1500}\}$ de N telle que toute suite de k naturels consécutils contienne au moins un élément de l'ensemble C_{k-999} pour $k = 1\,000, 1\,001, \dots, 2\,499$.

SOLUTION de François LO JACOMO (Paris).

Il existe même une partition $\{C_1, C_2, \dots, C_{1658}\}$ de N vérifiant la même propriété (pour $k = 1\,000, \dots, 2\,657$) : plus généralement, pour a donné, la méthode ci-dessous parmet de construire une partition $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ de N ($m > (e - 1)a - 3{,}06\sqrt{a}$) telle que toute suite de $k + a$ naturels consécutifs contienne au moins un élément de l'ensemble C_k, pour $k = 1, 2, \dots, m$.

Soit q un entier arbitraire entre 1 et $a + 1$ (= 1 000 dans l'énoncé initial).
Posons : $a_0 = a + 1$
et pour $0 \leq i < q$ $\quad b_i = E(a_i/q)$,
$a_{i+1} = a_i + b_i$.

Si $a_i \leq k + a < a_{i+1}$ $(0 \leq i \leq q)$, posons $r_k = (k + a) - a_i$.
donc $(0 \leq r_k < b_i)$ et définissons : $C_k = \{(b_i q)\,n + (r_k q + i)\}_{n \geq 0}$

Il est clair que les C_k constituent une partition de N : à tout entier c on peut associer un et un seul i tel que $(c - i)$ soit multiple de q, puis un et un seul r tel que $(c - i - r\,q)$ soit multiple de $b_i q$, avec $0 \leq i < q$ et $0 \leq r < b_i$, donc c appartient à un et un seul C_k avec $k = (a_i - a) + r$.

Il est clair, également, que C_k, progression arithmétique de raison $b_i q \leq a_i \leq k + a$ dont le premier élément est $< b_i \leq k + a$, vérifie : "toute suite de $k + a$ naturels consécutifs contient au moins un élément de l'ensemble C_k".

Cette partition contient $m = a_q - a_0$ ensembles : il reste donc à prouver que pour certains q, le nombre m d'ensembles C_k ainsi définis vérifie l'inégalité annoncée (triviale pour $a \leq 20$).

La relation $\quad a_{i+1} = E((1 + (1/q))\,a_i)$
entraîne $\quad (1 + (1/q))\,a_i - 1 < a_{i+1} \leq (1 + (1/q))\,a_i$
donc, par récurrence $\quad (1 + (1/q))^i (a_0 - q) < a_i \leq (1 + (1/q))^i a_0$
(pour tout i, donc en particulier pour $i = q$).
Comme $\quad (1 + (1/q))^q > (1 - (1/2q))e$
(il suffit d'étudier $f(x) = x \operatorname{Log}(1 + (1/x)) + \operatorname{Log}(1 + (1/2x))$ pour s'en convaincre), il est facile de trouver des q (voisins de $\sqrt{(a_0 e / (2e - 2))}$) rendant ce minorant de $a_q > a_0 e - \sqrt{(2e(e - 1)\,a_0)}$, d'où le résultat annoncé.

Dans l'absolu, le nombre maximum d'ensembles C_k que l'on puisse construire en vérifiant la condition de l'énoncé ne saurait atteindre $(e - 1)a + 2$, car si $M = E((e - 1)a + 2)$,

$(1/(a+1)) + (1/(a+2)) + \ldots + (1/(a+M)) > 1$. Il n'existe donc pas de partition telle qu'au moins un entier sur $(a+k)$ appartienne à C_k pour tout k entre 1 et M.

La méthode ci-dessus est donc probablement optimale, d'autant que la minoration de m peut être un peu améliorée et l'intervalle où il convient de charcher le q optimal quelque peu précisé.

Dans le cas de l'énoncé initial ($a = 999$), j'ai testé tous les q entre 20 et 60 , et c'est pour $q = 37$ que j'ai obtenu la valeur (optimale) annoncée $m = 1\,658$.

Solutions partielles : Claude MORIN (Limoges), Charles NOTARI (Noë).

COURRIER DE LECTEURS

1) André BÉTHERMIN de Ficheux nous fait part du problème suivant, qui semble de haute difficulté :

Soit f l'application qui, à tout entier n écrit en base 10, associe le produit de ses chiffres, et g l'application définie par $g(n) = p$, p étant l'entier le plus petit tel que $f^p(n) < 10$.

exemple : $n = 35$, $f(35) = 15$, $f^2(15) = 5$ donc $g(35) = 2$.

question : g est-elle bornée ?

Des essais sur ordinateur ne lui ont pas permis de dépasser la valeur 10.

2) Jean COSTESEQUE de Toulouse répond au courrier de Michel CHAMBON (Masny), *Bulletin* 371, page 731, en signalant l'analogie de ses identités avec des identités étudiées par CAUCHY. Cette étude figure aux pages 267 (exemple IV), 275 et 276 (exemples II et III) de la *théorie des nombres* d'Edouard LUCAS. Ces exemples concernent les fonctions symétriques et sont situées au chapitre XV du livre II. Il signale aussi d'autres identités, fruits de ses recherches, et aimerait savoir si elles sont connues :

si $0 < j < \frac{n}{m}$ alors $\sum_{k=m}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{m}^{j} = 0$. De plus, si m divise n alors

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{m}^{\frac{n}{m}} = \frac{n\,!}{(m!)^{\frac{n}{m}}} .$$

3) Le Jean BOUTELOUP évoqué dans certains *Bulletins* est en fait *Jacques* BOUTELOUP de ROUEN. Pardon pour cette erreur de prénom, d'un ami à côté duquel j'ai dîné pendant le banquet des journées nationales de l'A.P.M.E.P à Rouen !