Les Problèmes de L'A.P.M.E.P

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes" ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

M.Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 Limoges

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

ENONCES

ENONCÉ n°175 (Jacques LEGRAND, Biarritz)

Soit M un point à l'intérieur d'un triangle ABC, d_A, d_B et d_C ses distances aux côtés. Démontrer : $2\left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right) \leq \frac{1}{d_A}+\frac{1}{d_B}+\frac{1}{d_C}$.

ÉNONCÉ n°176 (Dominique ROUX, Limoges)

Soit un triangle d'orthocentre H, O le centre et R le rayon du cercle circonscrit, I, le centre et r le rayon du cercle inscrit. Si I est milieu de [OO'], montrer que O'H = R - 2r.

ÉNONCÉ n°177 (Olympiades internationales 1988)

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a\,b + 1$ divise $a^2 + b^2$. Montrer que $\dfrac{a^2+b^2}{a\,b+1}$ est le carré d'un entier.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 158 (d'après Olympiades australiennes)

Soient n et p deux entiers pairs non nuls et f une fonction numérique telle que pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$f\left[\frac{1}{n}\left(x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p\right)\right] = \frac{1}{n}\left[f(x_1)^p + f(x_2)^p + \dots + f(x_n)^p\right].$$

Calculer le nombre $f(1989)$ sachant qu'il est plus grand que 1.

SOLUTION de Pierre SAMUEL (Orsay)

Si l'on prend tous les x_i égaux à x, la relation de l'énoncé donne

(1) $$f\left(x^p\right) = f(x)^p \,.$$

Ainsi $f(0)$ et $f(1)$ sont des solutions réelles de l'équation $t = t^p$; comme p - 1 est impair, ces nombres valent donc 0 ou 1.

En tenant compte de (1), la relation de l'énoncé s'écrit

$$f\left[\frac{1}{n}\left(x_1^p + \dots + x_n^p\right)\right] = \frac{1}{n}\left[f\left(x_1^p\right) + \dots + f\left(x_n^p\right)\right].$$

Comme p est pair, les x_i^p sont positifs arbitraires y_i. Si l'on prend $\frac{1}{2}n$ des y_i égaux à un nombre $x \geq 0$ et les autres égaux à $y \geq 0$, on obtient :

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

En posant $f(x) = f(0) + g(x)$, on a $g(0) = 0$ et, facilement $g\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}\left(g(x) + g(y)\right)$ pour x et y supérieurs à zéro. D'où, pour y=0,

$g\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}g(x)$, $g\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}g(x+y)$, et donc $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
D'où, par récurrence, $g(x) = g(1)x$ pour $x \in \mathbf{N}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{N}$, on a $f(x) = f(0) + a\,x$ avec $a = g(1)$. Si $a = 0$, tous les $f(x)$ $(x \in \mathbf{N})$ valent $f(0)$, soit 0 ou 1, contrairement à l'hypothèse $f(1989) > 1$. D'où $a \neq 0$. La relation (1) s'écrit ainsi, pour tout $x \in \mathbf{N}$:

$$f(0) + a\,x^p = (f(0) + a\,x)^p .$$

Comme N est infini, les polynômes des deux membres sont égaux. La comparaison des termes en x et en x^p donne $0 = p\,f(0)^{p-1}a$ et $a = a^p$. Comme $a \neq 0$, on a donc $f(0) = 0$ et $a = 1$. D'où $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{N}$, et $f(1989) = 1989$.

Autres solutions :
Luc BARRIA (Serres Morloas), Jean Claude CARREGA (Lyon), Régis CHARPENTIER (Fontainebleau), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Gérald GOUBY (Figeac), François JABŒUF (Montpellier), François LO JACOMO (Paris), Claude MORIN (Limoges), Charles NOTARI (Noé), Bernard PETIT (Brest).

ÉNONCÉ n°159 (Jean HAGENDORF, Orsay)

Existe-t-il une fonction strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dont toutes les valeurs sont irrationnelles ?

SOLUTIONS

Nous relevons trois types d'idées dans les solutions reçues. Les estimant également instructives, nous les présentons toutes :

Type 1 : SOLUTION de Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard)

La réponse est affirmative. On peut se contenter de chercher une fonction f strictement croissante de $]0\,,1[$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs irrationnelles. Il suffira de composer cette dernière fonction par la fonction g :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to &]0\,,1[\\ x & \to & \mathrm{Arctan}(x)/\pi + 1/2 \end{array}$$

pour obtenir une fonction $f \circ g$ répondant à l'énoncé.

Nous utiliserons la décomposition décimale d'un réel. Tout x de $]0\,,1[$ peut s'écrire sous forme décimale $0,x_1x_2 \ldots x_n \ldots$ où x_i est le ième chiffre de x, élément de $\{0, 1, \ldots, 9\}$. (Les x_i ne peuvent être égaux à 9 à partir d'un certain rang. Avec cette condition, la décomposition décimale est unique). x est rationnel si et seulement si la suite des chiffres est périodique à partir d'un certain rang.

L'ordre usuel sur $]0\,,\,1[$ équivaut à l'ordre lexicographique sur la suite des décimales, à savoir : si $x = 0,x_1x_2 \dots x_n \dots$ et $y = 0,y_1y_2 \dots y_n \dots$ alors x est inférieur à y si et seulement si il existe un rang k supérieur ou égal à 1 tel que :

$$x_1 = y_1\,, \dots, x_{k-1} = y_{k-1} \text{ et } x_k < y_k.$$

Soit (a_i) $i \in \mathbf{N}^*$ une suite auxiliaire non périodique de chiffres (résultant par exemple de la décomposition décimale d'un irrationnel quelconque). On pose alors :

$$f(x) = 0,x_1a_1x_2a_1a_2x_3a_1a_2a_3x_4 \dots x_na_1a_2a_3 \dots a_nx_{n+1} \dots$$

$f(x)$ est donc défini par sa décomposition décimale, obtenue en intercalant les a_i entre les x_i, x_n étant suivi de n chiffres $a_1, \dots, a_n$. Alors f répond à la question.

i) f est strictement croissante. En effet, soient x et y vérifiant :

$$x = 0,x_1x_2 \dots x_n$$
$$y = 0,y_1y_2 \dots y_n$$
$$x_1 = y_1, \dots, x_{k-1} = y_{k-1} \text{ et } x_k < y_k.$$

Alors :

$$f(x) = 0,x_1a_1x_2a_1a_2x_3a_1a_2a_3x_4 \dots x_{k-1}a_1a_2a_3 \dots a_{k-1}\,x_k \dots$$
$$f(y) = 0,y_1a_1y_2a_1a_2y_3a_1a_2a_3y_4 \dots y_{k-1}a_1a_2a_3 \dots a_{k-1}\,y_k \dots$$

Les chiffres de $f(x)$ et de $f(y)$ sont égaux jusqu'au rang $k-1$ $x_k < y_k$ donc $f(x) < f(y)$.

ii) f est à valeurs irrationnelles. En effet, supposons que la suite des décimales de $f(x)$ soit périodique de période p à partir d'un certain rang N. Comme il apparaît des suites arbitrairement longues $a_1a_2 \dots a_n$ au delà de ce rang N, cela signifierait que la suite (a_i) est périodique de période p, ce qui n'est pas le cas. f est donc bien à valeurs irrationnelles.

Type 2 : SOLUTION de Pierre SAMUEL (Orsay)

On sait que les nombres rationnels forment une suite dénombrable $(r_q)_{q \in \mathbf{N}^*}$. Dans $\mathbf{R}$, entourons chaque r_q d'un intervalle ouvert de longueur 2^{-q} La réunion I de ces intervalles est un ouvert de $\mathbf{R}$, de mesure *finie* inférieure ou égale à 2. Ses composantes connexes sont des intervalles ouverts finis $\mathrm{I}_n =]a_n\,,\,a'_n[$ $(n \in \mathbf{N})$ deux à deux disjoints. Le complémentaire $\mathrm{F} = \mathbf{R} \setminus \mathrm{I}$ est un fermé de mesure infinie (ayant donc la puissance du continu ; c'est une espèce d'ensemble de Cantor). Soit F l'ensemble obtenu en retirant de F' les extrêmités a'_n des intervalles I_n..

L'ensemble F a les deux propriétés suivantes :

1) (Densité) - Entre deux points x et y de F tels que $x < y$, il y en a un troisième z tel que $x < z < y$. En effet, entre x et y, il y a un nombre rationnel r élément d'un intervalle $I_n =]a_n , a'_n[$; alors $x \leq a_n$ et $y > a'_n$. Si $x < a_n$, on prend $z = a_n$ Sinon, on intercalle, entre a'_n et y, un nombre rationnel s, élément de $I_q =]a_q , a'_q[$; comme $s > a'_n$, on a $q \neq n$ et $a_q > a'_n$; on prend alors $z = a_q$.

(2) Toute partie non vide majorée A de F a une borne supérieure dans F. En effet, soit b la borne supérieure de A dans $\mathbf{R}$. Comme F' est fermé, on a $b \in$ F', d'où $b \in$ F sauf si b est l'une des extrêmités a'_n ; mais ceci est impossible car la relation $A \subset F$ montre que a_n majore alors A et est donc sa borne supérieure. (Il en est de même pour l'existence de bornes inférieures, mais il faut éventuellement remplacer un a'_n par le a_n correspondant).

Cela étant, comme F n'est ni majoré, ni minoré (sinon l'un des I_n serait infini), on a une application strictement croissante f'' de $\mathbf{Z}$ dans F. En prenant successivement les milieux , (1) montre que f'' se prolonge en une application strictement croissante f' de l'ensemble D des nombres dyadiques (de la forme $p/2^q$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$) dans F. Si x est un nombre réel quelconque, il est la borne supérieure d'une partie B de D, majorée par $m \in$ D. Alors f'(B) est majorée par $f'(m)$. Donc, par (2), f' (B) a une borne supérieure dans F qu'on note $f(x)$. Il est clair que f prolonge f' et qu'on a $f(x) \geq f(d)$ (resp.$f(x) \leq f(d)$) pour tout nombre dyadique d qui minore (resp. majore) x . En intercalant deux nombres dyadiques d et d' tels que $d < d'$ entre deux nombres réels x et y tels que $x < y$, on voit qu'on a $f(x) \leq f(d) \leq f(y)$. Donc f est strictement croissante et prend ses valeurs dans F.

On a donc trouvé une application strictement croissante f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui ne prend aucune valeur rationnelle.

Type 3 : SOLUTION de Bernard HERON (Orsay)

Construction sur]0 , 1[d'une fonction strictement croissante, bornée, à valeurs toutes irrationnelles.

Tout réel $t \in]0\,,1[$ s'écrit $t = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n$ avec $a_n = 0$ ou 1 pour tout n. Ce développement est unique, sauf si t est une fraction de dénominateur égal à une puissance de 2. Il y a alors exactement deux suites associées à t :

$(a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, 0, \dots)$ et $(a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 1, 1, 1, \dots)$;

dans ce cas, nous optons pour celle dont tous les termes valent 1 à partir d'un certain rang. Avec ce choix appelé développement dyadique impropre (DDI) de t, on a (*) le DDI (a_n) de tout réel $t \in]0\,,1[$ comporte une infinité de 1.

Propriété : A chaque $t \in]0\,,1[$, on associe son DDI (a_n) et $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\,!}$

On a : i) $0 < \varphi(t) < e - 1$,

ii) $t \to \varphi(t)$ est strictement croissante,

iii) $\varphi(t)$ est irrationnel.

Preuve.

i) En effet, les a_n ne sont ni tous nuls, ni tous égaux à 1 puisque $t \in]0,1[$.

ii) Soient deux réels s et t avec $0 < s < t$, de DDI (a_n) et (b_n). Vu que $s \neq t$, leurs DDI sont distincts ; soit N le plus petit indice n tel que $a_n \neq b_n$. Montrons que $a_N = 0$ et $b_N = 1$. On a

$$0 < t - s \leq 2^{-N}(b_N - a_N) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} b_n \leq 2^{-N}(b_N - a_N + 1)$$

car $0 \leq a_n, b_n \leq 1$

et $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-N}$. Donc $0 < b_N - a_N + 1$; or $b_N \neq a_N$ et chacun vaut 0 ou 1, par conséquent $b_N = 1$ et $a_N = 0$. On en déduit

$$\varphi(t) - \varphi(s) = \frac{1}{N\,!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{n\,!} \geq \frac{1}{N\,!} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ car } b_n - a_n \geq -1$$

et comme $\frac{1}{NN\,!} > \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, on obtient $\varphi(t) - \varphi(s) > \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{N\,!} \geq 0$.

iii) Preuve par l'absurde calquée sur celle de l'irrationnalité de e.

Supposons que pour un $t \in]0\,,1[$ de DDI (a_n), on ait $\varphi(t) \in \mathbb{Q}$, soit $\varphi(t) = p/q$, avec p et q entiers. On fixe $N > q$, et on pose $S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n\,!}$;

d'après (*), on a $0 < \varphi(t) - S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n\,!} < \frac{1}{NN\,!}$

d'où $0 < (\varphi(t) - S_N)\,N\,! < 1$, mais d'autre part

$(\varphi(t) - S_N)\,N\,! = p\,\frac{N\,!}{q} - \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{N\,!}{n\,!}$ est entier car $N > q$. On aboutit à une contradiction ; $\varphi(t)$ est donc irrationnel.

Exemple de fonction strictement croissante de R dans R à valeurs toutes irrationnelles.

Lemme : L'application $\Phi : [0\,,1[\to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(t) = \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{t+1}{2}\right)$ est strictement croissante, à valeurs dans $]0\,,1[$, toutes irrationnelles.
Cela découle directement des propriétés de φ.
Maintenant, pour $x \in \mathbb{R}$, notons $E(x) \in \mathbb{Z}$ sa partie entière et posons

$$F(x) = E(x) + \Phi(x - E(x))$$

Il est clair que $F(x)$ est irrationnel pour tout x. Soient x et y deux réels quelconques vérifiant $x < y$; on a
- ou bien $E(x) + 1 \leq E(y)$ et alors $F(x) < E(x) + 1 \leq E(y) < F(y)$ puisque Φ est à valeurs dans $]0\,,1[$,
- ou bien $E(x) = E(y)$ mais alors, $x - E(x) < y - E(y)$ et donc $F(x) < F(y)$ puisque Φ est strictement croissante sur $[0\,,1[$.

Ainsi, F est strictement croissante et répond à la question.

Autres solutions :
Régis CHARPENTIER, Fontainebleau (type 3), Gérald GOUBY, Figeac (type 2), Marc GUINOT, Bourg-en-Bresse (type 3), Jean HAGENDORF, Orsay (type 2), G.J.HUDSON, Dorridge, Grande Bretagne (type 1), Jean LEFORT, Wintzenheim (type 3), François LO JACOMO, Paris (type 3), Bernard PETIT, Brest (type 3) et deux réponses fausses.

Remarques dues à François LO JACOMO :

1) Il est évidemment impossible de trouver des fonctions strictement croissantes de R dans R dont toutes les valeurs sont *rationnelles*, ni même

algébriques : comment envoyer injectivement un ensemble non dénombrable dans un ensemble dénombrable ?

2) Il n'est pas non plus possible de trouver une *bijection* strictement croissante de **R** dans l'ensemble des irrationnels. En effet, soit f une fonction strictement croissante de **R** dans **R**, dont toutes les valeurs sont irrationnelles.
A tout $u \in \mathbf{Q} \cap]f(-\infty), f(+\infty)[$ associons $X = \sup\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) < u\}$, $v = \sup\{f(x), x < X\}$, $y = f(x)$ et $w = \inf\{f(x), x > X\}$. Sur l'intervalle $[v, w]$ la seule valeur prise par f est y et comme u appartient lui aussi à l'intervalle (par la définition de X) et qu'il n'est pas atteint par f (puisque rationnel), l'intervalle n'est pas réduit à un point (c'est-à-dire $v < w$) il contient donc une infinité d'irrationnels qui ne sont pas atteints par f.

ÉNONCÉ N°160 (Dominique ROUX, Limoges)

On dira qu'une famille F d'entiers *"couvre"* un entier m si tout entier k, $1 \leq k \leq m$, est somme d'une sous-famille de F. m étant donné, quel est le plus petit entier p tel que toute famille de p entiers non nuls de somme m couvre m ?

SOLUTION de Pierre SAMUEL (Orsay).

Appelons "p - famille" toute famille de p entiers ≥ 1. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(A) Toute p - famille de somme m couvre m.

(B) On a $2p > m$.

En effet, si $2p \leq m$, la p - famille $(2,2,...,2,m-2p+2)$ ne contient aucun nombre 1 et ne peut donc couvrir m.

Réciproquement, l'on procède par récurrence sur p, les cas $p = 1, m = 1$ et $p = 2$ (alors $m = 2$ ou $m = 3$) étant quasi évidents. Soit F une p - famille de somme m. Si elle ne contient que des 1, on a $p = m$ et F couvre m. Sinon, soit k le plus petit entier ≥ 2 figurant dans F. Notons F' la $(p-1)$ - famille obtenue en retirant k de F ; sa somme est $m' = m - k$.
L'inégalité $2(p-1) > m'$ qui équivaut à $2p > m - k + 2$, est vraie car $k \geq 2$. Donc, par récurrence, F couvre $m' = m - k$.

Pour que F couvre m, il suffit alors que l'ensemble $\{0,1,2,...,m-k\}$ contienne k entiers consécutifs, c'est-à-dire que $k \leq m - k + 1$, ou encore que $2k \leq m + 1$. Soit q le nombre des entiers ≥ 2 (donc $\geq k$) qui figurent dans F. Si $q = 1$, on a $F = \{1,1,...,1,k\}$, d'où $k = m - p + 1$ et l'inégalité

$2k \leq m + 1$ s'écrit $2m - 2p + 2 \leq m + 1$, c'est-à-dire $m \leq 2p - 1$; elle est vraie parceque $m < 2p$ et qu'il s'agit d'entiers. Si $q \geq 2$, la considération de la somme de F donne $p - q + 2k \leq m$, d'où $2k \leq m - (p - q)$ et $2k \leq m + 1$ est *a fortiori* vraie. cqfd.

Donc le plus petit entier p tel que toute p - famille couvre m est $1 + \dfrac{1}{2} m$ si m est pair, et $\dfrac{1}{2}(m + 1)$ si m est impair.

Autres solutions :
Jean-Claude CARREGA (Lyon), Gérald GOUBY (Figeac), Pierre-Yves LE CLOIREC (Rennes), François LO JACOMO (Paris), Claude MORIN (Limoges).

Remarque due à Claude MORIN :
On obtient un problème voisin en remplaçant dans l'énoncé *"toute famille de p entiers"* par *"il existe une famille de p entiers"*. La réponse est alors $p = \left[\dfrac{\ln m}{\ln 2}\right] + 1$, c'est-à-dire $p = n + 1$ avec $2^n \leq m < 2^{n+1}$.

En effet, d'une part la famille $F = \{1, 2, 2^2, ..., 2^{n+1}, m - 2^n + 1\}$ couvre m : elle a $n + 1$ éléments dont la somme vaut m, et

- si $1 \leq k \leq 2^n - 1$ alors $k = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$ avec $a_i \in \{0,1\}$

- si $2^n \leq k \leq m$ alors $k' = k - (m - 2^n + 1)$ est compris entre $2^n - m - 1$ et $2^n - 1$ donc entre 0 et $2^n - 1$, d'où $k' = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a'_i 2^i$

d'autre part, si card $F \leq n$, F ne couvre pas m car il n'y a que $2^n - 1$ parties non vides dans $\mathbf{P}(F)$ et que $2^n - 1 < m$.

COURRIER DE LECTEURS

I) Solutions tardives :
1) Tentative de solution du n°157 par Jean LEMAIRE (Lille)
2) François LO JACOMO communique une solution élémentaire du n°136 due à G.J.HUDSON (Dorridge, GRANDE BRETAGNE)

II) Maurice CRESTEY (Vincennes) apporte un complément au problème n°144 en résolvant la question voisine suivante :

Quel est l'ensemble E des réels x tels que, pour tout rationnel r strictement positif, r^x soit un rationnel ?

Solution

L'ensemble E contient visiblement **Z**. D'autre part, si x et y sont deux éléments de E et r un rationnel strictement positif, r^x , r^y et leur quotient r^{x-y} sont des rationnels strictement positifs. (E,+) est donc un sous-groupe additif du groupe additif (**R**,+)

Avec les mêmes notations, $\left(r^x\right)^y$ est rationnel, donc $xy \in$ E. E est donc multiplicativement stable et (E,+,.) est un sous-anneau du corps des réels.

Autorisons nous à utiliser le résultat cité par Pierre SAMUEL dans sa solution du problème n°144 (voir *Bulletin* n° 369, page 429) : "Si x est un nombre réel tel que r^x soit un nombre algébrique pour tout nombre rationnel $r > 0$, alors x est rationnel".

Ce résultat prouve que l'ensemble E est contenu dans **Q**. Enfin, soit $x = \frac{p}{q}$ (irréductible) un élément de E, strictement positif, p et q étant deux entiers naturels non nuls. Pour tout n entier naturel $n^x = n^{\frac{p}{q}}$ est rationnel. Cela implique que $\sqrt[q]{n^p}$ est rationnel, donc entier, en vertu d'un résultat élémentaire, donc que $q = 1$. Finalement $x = \frac{p}{q} \in$ **N** et E = **Z**.

ERRATA

page 259, 3ème ligne du bas : lire "pour quel angle", au lieu de "pour que l'angle"

page 264, 8ème ligne : lire A(R,O) au lieu de A(O,R).

page 269 : échanger les commentaires face aux deux figures.