Les Problèmes de L'A.P.M.E.P

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes" ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

M.Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 Limoges

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

ENONCES

ENONCE N°169 (Michel LAFOND , Dijon)

Est-il vrai que si m, n et p sont des entiers positifs tels que l'un d'eux soit premier avec les deux autres, alors l'équation $x^m + y^n = z^p$ admet une solution dans $\mathbf{N}^*$.

ENONCE N°170 (François COULOIGNIER, Forges les Eaux)

Déterminer les points du cercle trigonométrique à coordonnées décimales.

ENONCE N°171 (Claude BUISSIEZ, Clermont-Ferrand)

Les deux suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation de récurrence :
$u_{n+1} = 2(2n+3)u_n + u_{n-1}$ $(n > 0)$ et sont définies par $a_0 = 3$, $a_1 = 19$, $b_0 = 1$, $b_1 = 7$. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

dével en fract continue de (e)

SOLUTIONS

ENONCE N°152 (CONCOURS GÉNÉRAL 1988)

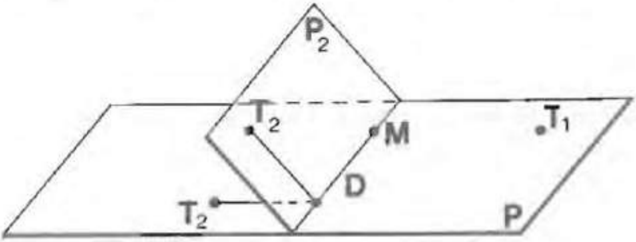
On considère deux sphères S_1 et S_2 et une droite D ne les rencontrant pas. Soit M un point de D et, pour $i = 1$ et $i = 2$, T_i le point de contact avec S_i d'une tangente à S_i passant par M.

Situer M sur D de façon que $MT_1 + MT_2$ soit minimum.

SOLUTION 1 (Raymond RAYNAUD , Digne)

Pour $i = 1$ et $i = 2$, soit P_i un des plans tangents à S_i contenant D et T_i son point de contact. MT_i est alors une tangente à S_i . Le problème revient à trouver le plus court trajet de T_1 à T_2 inclus dans $P_1 \cup P_2$.

On rabat P_2 sur P_1 par rotation autour de D, de façon que T_1 et le rabattu T'_2 de T_2 soient de part et d'autre de D. Le point M de D rendant minimum $MT_1 + MT_2$ est le point de rencontre de D avec $[T_1T'_2]$.



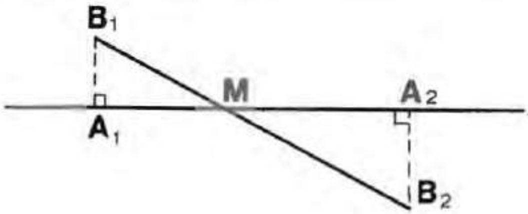
SOLUTION 2 (Claude MORIN, Limoges).

Soient R_i le rayon de la sphère S_i, O_i son centre, A_i la projection orthogonale de O_i sur D.

$$MT_i^2 = MO_i^2 - R_i^2 = MA_i^2 + A_iO_i^2 - R_i^2 = MA_i^2 + b_i^2$$

où $b_i = \sqrt{A_iO_i^2 - R_i^2}$.

Dans un plan contenant D, soit B_i un point tel que $A_iB_i = b_i$ A_i étant la projection orthogonale de B_i sur D ; choisissons de plus B_1 et B_2 de part et d'autre de D.



Il est clair que $f(M) = MT_1 + MT_2 = MB_1 + MB_2$ est minimal quand M est à l'intersection de D et du segment $[B_1B_2]$ (plus court chemin joignant B_1 à B_2). M est donc caractérisé par la relation : $\dfrac{\overrightarrow{MA_1}}{b_1} + \dfrac{\overrightarrow{MA_2}}{b_2} = \vec{0}$.

Autres solutions :

Jean BOUTELOUP (Rouen) , Jean-François BILGOT (Saint Paulien) , François COULOIGNIER (Forges-les-Eaux) , Edgar DELPLANCHE (Créteil) , Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard) , Jean LEFORT (Wintzenheim) , Luc BARRIA (Serres-Morlaas), Jacques LEGRAND (Biarritz) , Jean LEMAIRE (Lille) , François LO JACOMO (Paris) , MARCOURT (Ste Savine) , Naïm MEGARBANE (Paris) , Charles NOTARI (Noë) , Daniel PECKER (Paris).

ENONCE N°153 (OLYMPIADES INTERNATIONALES 1987)

Existe-t-il une application f de **N** dans **N** telle que pour tout entier n $f(f(n)) = n + 1987$?

SOLUTION 1 (François COULOIGNIER , Forges-les-Eaux).

* Soit f : $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que $f(f(n)) = n + 1987$.

Alors $f(f(f(n))) = f(n) + 1987 = f(n + 1987)$ et par récurrence,
$\forall (n, k) \in \mathbf{N}^2, f(n + k1987) = f(n) + k\,1987.$

* Supposons qu'il existe un entier n pour lequel on ait un entier k tel que $f(n) = n + k\,1987$.
Alors, $n + 1987 = f(f(n)) = f(n) + k\,1987 = n + 2k1987$ d'où $2k = 1$ ce qui est impossible.

* f induit donc une involution $\tilde{f}$ sur $E = \mathbf{Z}/_{1987\,\mathbf{Z}}$ sans élément invariant, les orbites suivant ont donc toutes 2 éléments, ce qui n'est possible que si E a un nombre pair d'éléments. f ne peut donc pas exister.

SOLUTION 2 (Pierre SAMUEL , Orsay).

On se donne un entier $p \geq 1$. On cherche les applications f de **N** dans **N** telles que $f(f(n)) = n + p$ pour tout n. On note :

a) f est *injective* car, en appliquant f à une égalité $f(n) = f(n')$, on obtient $n + p = n' + p$ d'où $n = n'$.

b) On a $f(n + p) = f(f^2(n)) = f(n) + p$.
Ainsi $n \geq p$ implique $f(n) \geq p$.
Par récurrence sur j, on voit que $f(n + jp) = f(n) + jp$ pour tout $j \geq 0$.

Cela étant, on pose $I = \{0, 1, \dots, p-1\}$, $I' = \{i \in I \mid f(i) \in I\}$ et $I'' = \{j \in I \mid f(j) \geq p\}$; ainsi (I', I'') est une partition de I. Comme pour $i \in I'$, on a $f(f(i)) = i + p \geq p$, on voit que $f(I') \in I''$. Pour $j \in I''$ $f(j)$ est de la forme $p + k$ avec $k \geq 0$ d'où $f(j) = f(f(k))$ et $j = f(k)$ par injectivité ; par b) on doit avoir $k < p$, d'où $k \in I'$. Ainsi $f(I') = I''$. Comme f est injective, I' et I'' ont le même nombre d'éléments, ce qui implique que p est pair. Donc, il n'y a *pas de solution* pour $p = 1987$.

Examinons le cas où p est pair, $p = 2q$, où $f(n) = n + q$ convient évidemment. Mais il y a d'autres solutions. D'après l'analyse faite ci-dessus, on se donne une partition (I', I'') de $I = \{0, 1, \dots, p-1\}$ en deux parties à q éléments, I' et I'', une bijection u de I' sur I'' et la bijection réciproque v. Par division euclidienne, on écrit tout $n \in \mathbf{N}$ sous la forme $n = jp + r$ avec $r \in I$ et l'on pose :
◊ $f(n) = u(r) + jp$ si $r \in I'$;
◊ $f(n) = v(r) + (j+1)p$ si $r \in I''$.
Dans le premier cas, on a $f(f(n)) = v(u(r)) + (j+1)p = r + (j+1)p = n + p$; dans le second, on a $f(f(n)) = f(v(r) + (j+1)p) = u(v(r)) + (j+1)p$

$$= r + (j + p) = n + p$$

Ainsi f est bien une solution.

Il y a $\binom{2q}{q}$ choix pour la partie I' et alors q ! choix pour la bijection u.

Le *nombre de solutions* est donc : $\binom{2q}{q} q\,! = \dfrac{(2q)!}{q\,!} = (q+1)(q+2)...(2q)$

Pour $p = 2$ ($q = 1$), il y a deux solutions :

la solution évidente $f(n) = n + 1$ (I' = $\{0\}$), et

l'application g définie par $g(2j+1) = 2j$ et $g(2j) = 2j + 3$ (I' = $\{1\}$)

Autres solutions :

Richard ANDRE-JEANNIN (Sfax, Tunisie) , Luc BARRIA (Serres-Morlaas) , André BETHERMIN (Arras) , Jean BOUTELOUP (Rouen) , Edgard DELPLANCHE (Créteil) , Robert FERREOL (Paris) , H. FRAYSSE (Toulouse) , Serge GAIGNOUX (Martigny sur Vesle) , Gérald GOUBY (Figeac) , Bernard HERON (Orsay) , François JABŒUF (Montpellier) , Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard) Jacques LEGRAND (Biarritz) , François LO JACOMO (Paris) , MARCOURT (Ste Savine) , Claude MORIN (Limoges) , Daniel PECKER (Paris), Bernard PETIT (Brest) , Catherine PHILIPPE (Bon-secours) , Raymond RAYNAUD (Digne) , Xavier RELIQUET Fez Ville Nouvelle, Maroc) , et deux réponses fausses.

ENONCE N°154 (Eric TEROUANE , Montpellier)

On appelle auto-énumération de longueur p une suite de p entiers $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ telle que parmi $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ il y ait a_0 fois le nombre 0, a_1 fois le nombre 1, ... , a_{p-1} fois le nombre $p - 1$.

Pour quels entiers p existe-t-il des auto-énumérations de longueur p ?

SOLUTION de François COULOIGNIER (Forges les Eaux).

Il n'y a pas de solution si p =1 ou 2 :
(0) , (0,0) , (0,1),(1,0),(1,1) ne sont pas des auto-énumérations.

Si $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ est une auto-énumération, avec $p \geq 3$, on a :

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i = \sum_{i=0}^{p-1} i a_i \quad \text{d'où } a_0 = \sum_{i=0}^{p-1} (i-1) a_i \quad (f)$$

Si $a_0 = 1$, (f) implique $a_2 = 1$ et la nullité des éventuels termes d'indices plus grands : donc $a_1 = 2$ et puisqu'il y a un zéro, la suite ne peut être que **1 , 2 , 1 , 0** qui est bien une auto-énumération.

Si $a_0 = 2$, (f) montre que a_2 vaut 2 et que les termes suivants sont nuls car a_2 est non nul ; a_1 peut valoir indifféremment 0 ou 1. Il y a finalement 2 solutions de ce type : **2 , 0 , 2 , 0** et **2 , 1 , 2 , 0 , 0** .

Si $a_0 \geq 3$, notons $a_0 = n$. On a $a_n \geq 1$ et si $a_n \geq 2$ alors (f) implique $a_0 \geq 2(n-1)$ d'où $a_0 \leq 2$. Par conséquent, $a_n = 1$ et (f) montre que le seul terme d'indice plus grand que 2 est a_2 qui vaut 1. On voit alors que le seul choix de a_1 qui conduit à une solution est $a_1 = 2$, cette solution étant ***n* , 2,1 , 0 ... , 0 , 1 , 0 ... , 0** avec n zéros.

Conclusion : les entiers p pour lesquels il n'existe pas d'auto-énumération d'ordre p sont 1, 2, 3 et 6.

Autres solutions :
Jean BOUTELOUP (Rouen) , Robert FERREOL (Paris) , Bernard HERON (Orsay), Michel LAFOND (Dijon) , Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard) , François LO JACOMO (Paris) , Claude MORIN (Limoges) , Charles NOTARI (Noë) , Daniel PECKER (Paris) , Adrien SLUYS (Bruxelles).

COMPLEMENTS dûs à Paule KNERR (Irem de Paris-Nord) et Jean-Pierre OLIVIER et Eric TEROUANE de l'Université Paul VALERY à MONTPELLIER.

Deux problèmes de mathématique amusante, étudiés l'un par McKAY et WATERMAN ([2]), l'autre par ROBINSON cité par HOFSTADTER ([3]), ont été rapprochés par BOLON et KNERR ([1]). Ces deux problèmes sont l'occasion d'étudier les orbites de deux autoapplications, et de développer pour cela des techniques dont on peut espérer qu'elles trouveront d'autres types d'applications.

Présentation des problèmes :

Dans les deux cas, il s'agit de trouver une suite de p entiers $a_0 , a_1 , \dots , a_{p-1}$ qui rende vraie une phrase :

◊ *Premier problème* : " parmi $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ il y a a_0 fois le nombre 0, a_1 fois le nombre 1, ... , a_{p-1} fois le nombre $p - 1$". Nous appellerons une telle suite $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ une *auto-énumération.*

◊ *Deuxième problème :* "cette phrase contient a_0 fois le chiffre 0, a_1 fois le chiffre 1, ... , a_{p-1} fois le chiffre $p - 1$ " (les a_i étant écrits en base p). Nous appellerons une telle suite $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ une *auto-épellation.*

Les solutions de chacun de ces problèmes sont en fait les points fixes de deux applications de l'ensemble S des suites $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ $(a_i \in \mathbf{N})$ dans lui-même :

- L'application ${}^{1}O$ qui à tout $a \in S$ associe la suite ${}^{1}a$ où ${}^{1}a_i$ est le nombre d'occurences du nombre i parmi $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$,pour le premier problème.
- L'application ${}_{1}O$ qui à tout $a \in S$ associe la suite ${}_{1}a$ où ${}_{1}a_i - 1$ est le nombre d'occurences du chiffre i dans l'écriture de $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ en base p , pour le second problème.

Nous nous proposons d'étudier ces deux applications : nous en décrivons toutes les orbites, aboutissant soit à des points fixes, qui sont les solutions déjà connues de nos deux problèmes de départ, soit à des cycles. Ce faisant, nous établissons la parenté, déjà suspectée, entre le premier problème et une partie du second. Enfin nous étudions l'index de ces deux applications.

Nous ne donnons ici que l'énoncé des résultats obtenus et le schéma général des démonstrations, dont nous tenons le détail à la disposition du lecteur intéressé.

Fixons tout d'abord quelques notations et conventions :
Nous noterons ${}^{2}O$ pour ${}^{1}O \circ {}^{1}O$, ${}_{2}O$ pour ${}_{1}O \circ {}_{1}O$, ... et ${}^{k}A$ (resp.${}_{k}A$) pour l'image par ${}^{k}O$ (resp. ${}_{k}O$) d'une partie A de S. A est dite stable pour ${}^{1}O$ (resp.${}_{1}O$) si ${}^{1}A$ (resp.${}_{1}A$) est inclus dans A.

Résultats :

L'application ${}^{1}O$ possède, selon la valeur de p, une ou deux orbites aboutissant à un seul cycle quand $p = 1, 2, 3$ ou 6 (et dans ce cas, il n'existe pas d'auto-énumération), à deux points fixes quand $p = 4$ (fournissant ainsi deux auto-énumérations), à un point fixe quand $p = 5$ et un point fixe et un cycle quand $p \geq 7$ (dans ces deux derniers cas, il y a donc une et une seule auto-énumérations). Voici la liste de ces cycles ou points fixes :

$p = 1$	un cycle d'ordre 2 : [(0),(1)].
$p = 2$	un cycle d'ordre 3 : [(1,1),(0,2),(1,0)].
$p = 3$	un cycle d'ordre 4 : [(2,0,0),(2,0,1),(1,1,1),(0,3,0)]
$p = 4$	deux points fixes : [(2,0,2,0)] et [(1,2,1,0)].
$p = 5$	un point fixe : [(2,1,2,0,0)].
$p = 6$	un cycle d'ordre 2 : [(2,3,0,1,0,0),(3,1,1,1,0,0)].
$p = 7$	un point fixe : [(3,2,1,1,0,0,0)] et un cycle d'ordre 3 : [(3,3,0,0,1,0,0),(4,1,0,2,0,0,0),(4,1,1,0,1,0,0)].
$p \geq 8$	un point fixe : [(p - 4,2,1,0 ...,1,0,0,0)] et un cycle d'ordre 2: [(p - 4,3,0...,1,0,0),(p - 3,1,0,1,0...,1,0,0,0)], où 0... désigne une suite (éventuellement vide) de zéros.

L'index de l'application $^{1}0$ est un entier d , dépendant de p , tel que pour tout a appartenant à S, a soit un point fixe ou un élément d'un cycle (c'est à dire $^{d+2}a = {}^{d}a$, dans le cas général où le cycle est d'ordre 2). On montre que cet index est "très petit" par rapport à p .

L'application $_{1}0$ possède, selon la valeur de p , une à quatre orbites. Pour $p \geq 5$, l'une de ces orbites aboutit au point fixe qui s'écrit, en base p, [(1,11,2,1...1)] et les autres sont en bijection avec les orbites de l'application $^{1}0$. On obtient ainsi une auto-épellation pour $p = 2$ ou 6, trois pour $p = 5$ ou $p \geq 7$. Voici la liste de ces cycles ou points fixes :

$p = 1$	un cycle d'ordre 2 : [(0),(1)].
$p = 2$	un point fixe : [(11,100)].
$p = 3$	un cycle d'ordre 3 : [(1,10,10),(10,11,1),(2,12,1)] et trois points fixes : [(10,10,2)], [(1,11,2)] et [(2,2,10)].
$p = 4$	trois points fixes : [(1,11,2,1)], [(1,2,3,2)] et [(1,3,1,3)].
$p = 5$	deux points fixes : [(1,11,2,1,1)] et [(1,3,2,3,1)].
$p = 6$	un point fixe : [(1,11,2,1,1,1)] et un cycle d'ordre 2 : [(1,3,4,1,2,1),(1,4,2,2,2,1)].
$p = 7$	deux points fixes : [(1,11,2,1,1,1,1)], [(1,4,3,2,2,1,1)] et un cycle d'ordre 3 : [(1,4,4,1,1,2,1),(1,5,2,1,3,1,1),(1,5,2,2,1,2,1)]
$p \geq 8$	deux points fixes:[(1,11,2,1...,1)] et [(1,p - 3,3,2,1...,2,1,1)] et un cycle d'ordre 2: [(1,p-2,2,1,2,1...,2,1,1),(1,p-3,4,1...,2,1)]

Démonstrations

L'étude des orbites de l'application ${}^{1}O$ pour $p \leq 6$ se fait à la main. Pour établir les résultats généraux pour $p \geq 7$, on enferme les images successives de S dans des ensembles de plus en plus petits.

On décompose d'abord ${}^{1}S$ en : l'ensemble S_1 des suites non constantes dont chaque élément est inférieur à p d'une part, l'ensemble S'_1 des suites qui ont un élément égal à p d'autre part, et enfin, deux suites constantes, l'une de valeur 0, l'autre de valeur 1. Ces dernières ont leur image dans S'_1 qui a son image dans S_1 qui est stable si $p \geq 4$. On a donc ${}^{3}S$ inclus dans S_1.

On montre ensuite que l'image seconde ${}^{2}S_1$ de S_1 est contenue dans l'ensemble stable S_2 des suites non constantes vérifiant $a_i < p$ pour tout i et $\Sigma a_i = \Sigma i a_i = p$.

Tout élément de S_2 a une image itérée dans l'ensemble stable S_3 des suites de S_2 vérifiant $a_0 \geq p - 4$. La technique pour démontrer ce résultat consiste en la construction d'une "échelle" pour sortir de C, le complémentaire de S_3 dans S_2 : il s'agit d'une application t de S dans un ensemble fini X totalement ordonné, qui vérifie : pour toute suite a dans C, $t({}^{1}a) > t(a)$. Dans le cas présent on prend $X = \{0, 1, \dots, p\}$ et $t(a) = a_0$. Cette même technique sert également dans l'étude de la seconde application.

L'image cinquième ${}^{5}S_3$ de S_3 est contenur dans l'ensemble S_4 des six suites :

$e_1 = (p - 4,2,1,0\dots, 1,0,0,0)$

$e_2 = (p - 4,3,0\dots,1,0,0)$

$e_3 = (p - 3,1,0,1,0\dots,1,0,0,0)$ si $p \geq 8$,$(4,1,0,2,0,0,0)$ si $p = 7$

$e_4 = (p - 3,1,1,0\dots,1,0,0)$

$e_5 = (p - 3,2,0\dots,1,0)$

$e_6 = (p - 2,1,0\dots,1)$

On vérifie alors aisément que e_1 est un point fixe et que :

$e_6 \to e_5 \to e_4 \to e_2 \to e_3 \to e_2$ pour $p \geq 8$ et

$e_6 \to e_5 \to e_4 \to e_3 \to e_2 \to e_4$ pour $p = 7$, ce qui termine la démonstration du premier résultat.

Dans le cas de l'application ${}_{1}O$, il est clair que ${}_{1}S$ est inclus dans l'ensemble T des suites sans éléments nuls. Mais, contrairement à ce qui se passe avec ^{1}O, les images itérées $_{n}T$ de T sont des ensembles infinis. C'est pourquoi, dans ce cas, la description des orbites ne consiste plus à enfermer ces images successives dans des ensembles de plus en plus petits, mais à trouver des ensembles stables de plus en plus petits qui sont atteints par toutes les trajectoires. Dans ce but, nous utilisons comme "échelle" l'application t qui à toute suite a dans **T** associe la somme de ses éléments. Si D est une partie de T dont tout élément a vérifie $t\,({}_1a) < t\,(a)$, toute trajectoire de T atteint le complémentaire de D dans T. On est ainsi amené à étudier l'inégalité:

$$\Sigma\, {}_1\alpha_i = 2p + \Sigma\lfloor \mathrm{Log}_2 a_i \rfloor < \Sigma a_i \text{(où } \lfloor x \rfloor \text{ désigne la partie entière de } x\text{)}.$$

On établit successivement que toute orbite entre dans les ensembles stables T_1et T_2 définis par :

$$T_1 = \{\, a \mid \Sigma_{i\,\geq 0}\, a_i \geq 2p\,,\ \Sigma_{i\,\geq 1} a_i \geq 2p - 1 \text{ et } a_i \geq 1 \text{ pour tout } i \,\}$$
$$T_2 = \{\, a \mid 2p + 2 \geq \Sigma_{i\,\geq 0}\, a_i \geq 2p\,,\ \Sigma_{i \geq 1}\, a_i \geq 2p - 1 \text{ et } a_i \geq 1 \text{ pour tout } i \,\}$$

On décompose T_2 en T_3 et T_4 définis par :

$$T_3 = \{\, a \in T_2 \mid a_i < p \text{ pour tout } i \,\} \text{ et } T_4 = T_2 - T_3.$$

L'image seconde ${}_2T_4$de T_4 ne contient que des points fixes, du type (1,11,2,1...), ou des éléments de T_3. L'image troisième ${}_3T_3$ de T_3 est incluse dans:

$$B = \{\, a \mid a_i < p - 1 \text{ et } \mathrm{Card}_1()^{-1}(i) < p - 2 \text{ pour tout } i,\ a_0 = 1 \text{ et } \Sigma a_i = 2p \,\}$$

Enfin, on établit que l'application f définie par $f\,(b\,)_i = b_{i+1} - 1$ $(0 \leq i \leq p - 2)$ et $f\,(b\,)_{p-1} = 0$ est une bijection entre B et la partie A de S étudiée dans la première partie, ce qui termine la démonstration du second résultat.

Pour montrer comment l'index de l'application ^{1}O croît lentement avec la taille p des suites, on a construit de proche en proche, pour des valeurs croissantes de n , des suites dont l'image n-ième n'est ni un point fixe ni un élément d'un cycle. On montre ainsi empiriquement que p doit être supérieur à un entier p_n et on sait calculer les premiers éléments de la suite (p_n): on sait ainsi que p_8 est supérieur à 10^{10}.

Pour ce faire, on montre d'abord que ^4S est contenu dans :

$$J = \{ a \in S_2 \mid {}^1a_0 > p/2 \},$$

qui est décomposé en H et G = J - H , définis par :

$$H = \{a \in S_2 \mid {}^1a_0 > p/2 \text{ et il existe } i > 1 \text{ tel que } a_i > 1\}.$$

On montre que ^2G est contenu dans S_3 et on sait que $^8S_3$ est inclus dans l'ensemble des points fixes ou appartenant à un cycle. Il reste donc à établir une majoration du nombre d'images successives d'un élément de S_2 qui peuvent appartenir à H. En construisant de proche en proche des suites de H dont l'image n-ième est dans H, on vérifie que la longueur d'une telle suite est au moins 13 pour $n = 2$, 22 pour $n = 3$,58 pour $n = 4$, 294 pou $n = 5$, 4 552 pour $n = 6$, 354 402 pour $n = 7$.

Au-delà, les auteurs laissent cette joie à leur lecteur courageux. Ils savent par contre démontrer le résultat suivant, nettement plus faible, mais général : si n images succesives d'une suite H sont dans H, la longueur de la suite est au moins égale à $q_n = q'(\lfloor (n-2)/2 \rfloor)$, où q' est définie par q'(0) = 0 et $q'(x = 1) = 2 + q'(x)(q'(x) - 1)/2$. On a par exemple q(0) = q(1) = 4, q(2) = q(3) = 8, q(4) = q(5) = 30 , q(6) = q(7) = 437 etc.

En ce qui concerne l'application ^1O, il existe pour toute suite a dans S un entier d(a) tel que $^{d(a)}a$ soit un point fixe ou élément d'un cycle, mais on ne peut pas donner de majoration uniforme de d(a) en fonction de p car $^1S=S$.

Références :

[1] J.BOLON & P.KNERR, *A propos des suites autodescriptives,* Panirem, 27 (1982), PP.21-24.

[2] M.D.McKAY & M.S.WATERMAN, *Self descriptive strings,*The mathematical Gazette, 66(1982), N°453, pp.1-4

[3] D.R.HOFSTADTER, *A self-referential column about last January's column about self-reference,*Scientific American, 256(1982), N°1, pp. 12-17.

COURRIER DE LECTEUR

A la suite de l'énoncé n°143, Philippe DELHAM (Reims) propose d'autres relations concernant les termes de la suite de FIBONACCI :

$$u_{3n} = (-1)^n 3u_n + 5u_n^3$$

$$u_{5n} = 5u_n + (-1)^n 25u_n^3 + 25u_n^5$$

$$u_{7n} = (-1)^n 7u_n + 70u_n^3 + (-1)^n 175u_n^5 + 125u_n^7$$