Une curieuse suite

Notre collègue R.RAYNAUD de Digne l'a glanée dans les annales du baccalauréat (BORDEAUX 86).

Elle est définie, pour p dans $\mathbf{N}$ par :

$$I_p = \int_1^e x^2 (\ln x)^p \, dx \ .$$

Comme pour tout x dans $[1,e]$, $(\ln x)^p$ tend vers 0 en décroissant quand p tend vers l'infini, on a

$$\lim_{p \to \infty} I_p = 0 .$$

Une intégration par parties donne la relation de récurrence

$$I_p = \frac{e^3}{3} - \frac{p}{3} I_{p-1} \quad \text{avec } I_0 = \frac{e^3 - 1}{3} .$$

R. Raynaud essaie alors de calculer I_p à partir de cette relation avec sa calculette et constate que pour $0 \leq p \leq 25$ il trouve des valeurs voisines de celles que donne la méthode de Simpson pour le calcul de l'intégrale, mais qu'ensuite les ennuis commencent :

$$I_{27} < 0 \;,\; I_{28} = 13{,}9 \;,\; I_{29} = -127{,}6 \ldots$$

Comment expliquer ce phénomène ?

Supposons que nous choisissions une autre valeur de départ J_0 et que nous notions (J_p) la suite définie par $J_p = \frac{e^3}{3} - \frac{p}{3} J_{p-1}$

De $J_p - I_p = \frac{-p}{3}(J_{p-1} - I_{p-1}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^p p\,!\,(I_0 - J_0)$ et de la divergence de la suite $\left(-\frac{1}{3}\right)^p p\,!$, on déduit la divergence de $(J_p)_p$ pour tout $J_0 \neq I_0$. $(|J_p| \to +\infty)$. La moindre erreur de calcul soit dans la valeur de I_0 soit à l'étape k va déclancher (à partir d'un rang qui dépend évidemment de la calculette employée) des oscillations de plus en plus grandes de la suite $(J_p)_p$.

On dit que l'algorithme (ici du calcul de $\lim_p I_p = 0$) est *instable*.

On peut utiliser cet exercice (ou des variantes obtenues en changeant les bornes d'intégration ou l'exposant de x^2) à différents niveaux : en classe de seconde pour faire découvrir expérimentalement à la calculette le phénomène d'instabilité, en terminale pour comparer les diverses définitions de (I_p), en classe préparatoire ou en DEUG sous la forme suivante : étudier la suite définie par : I_0 donné, $I_p = \frac{e^3}{3} - \frac{p}{3} I_{p-1}$.

Paul-Louis HENNEQUIN