XN 1

J. 2232

session de 1990

concours interne
et concours d'accès à l'échelle de rémunération
des professeurs agrégés

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve conformément à la circulaire n° 86-828, du 28 juillet 1986.

Notations

Dans tout le problème, on désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées de taille n à éléments réels. Si A est un élément de $\mathcal{M}_n$, la notation $A = [a_{ij}]$ signifie que a_{ij} est le terme de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j de A. On dit que A est *nilpotente* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. La matrice A est dite *triangulaire supérieure stricte* si $a_{ij} = 0$ pour $i \geqslant j$.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathcal{L}(E)$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de E, et id_E l'application identique de E. Pour u, v éléments de $\mathcal{L}(E)$, on note uv le composé $u \circ v$. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, u^i est l'endomorphisme de E défini par la formule de récurrence $u^{i+1} = u^i u$, avec $u^0 = \mathrm{id}_E$. On dit que u est *nilpotent* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, sa dimension est notée dim E. Étant donnés un endomorphisme u de E, et $\mathcal{B}$ une base de E, on désigne par $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Il est rappelé qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n'admet pas nécessairement de valeur propre.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

1. Dans toute cette question, n désigne un entier strictement positif. Pour tout élément $A = [a_{i,j}]$ de $\mathcal{M}_n$, la *trace* $\mathrm{tr}(A)$ de A est définie par :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n$ qui vérifient $\mathrm{tr}(A) = 0$.

a. Prouver que $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$. Quelle est sa dimension ?

b. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n$. Prouver que la matrice $AB - BA$ appartient à $\mathcal{S}_n$.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E. Prouver que le nombre réel

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})\right)$$

est indépendant de la base $\mathcal{E}$ de E choisie pour le définir. Ce nombre réel sera appelé la *trace* de l'endomorphisme u.

c. Pour i et j éléments de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$, on note $M_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n$ dont le terme de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j est égal à 1, les autres termes de $M_{i,j}$ étant nuls.

Soient i et j des entiers distincts de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$. Calculer les matrices :

$$M_{i,j}M_{j,i} - M_{j,i}M_{i,j} \qquad \text{et} \qquad M_{i,j}M_{j,j} - M_{j,j}M_{i,j}$$

d. Soit φ une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ vérifiant :

$$\varphi(AB) = \varphi(BA)$$

pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n$.

Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que :

$$\varphi(A) = \lambda\, \mathrm{tr}(A)$$

pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$.

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, et u un endomorphisme nilpotent de E.

a. Prouver que u n'est pas surjectif.

b. Soient H un hyperplan de E contenant l'image de u, et $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E telle que $(e_1, ..., e_{n-1})$ soit une base de H.

Que peut-on dire de $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$?

En raisonnant par récurrence sur la valeur de l'entier n, prouver qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{F})$ soit triangulaire supérieure stricte.

c. Montrer que l'on a $\mathrm{tr}(u^p) = 0$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.

3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n, et u un endomorphisme de E tel que $\operatorname{tr}(u^p) = 0$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.

   a. Prouver que u n'est pas surjectif (on pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton).

   b. En raisonnant comme dans la question I.2.*b.*, montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E telle que $\operatorname{Mat}(u;\mathscr{E})$ soit triangulaire supérieure stricte.

   c. Prouver que l'endomorphisme u est nilpotent.

4. Énoncer le résultat démontré dans les questions I.2. et I.3.

PARTIE II

Si u et v sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on pose :

$$[u\,,\,v] = uv - vu.$$

On appelle *quaterne* tout quadruplet $Q = (u\,,\,v\,,\,w\,,\,E)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, et où u, v et w sont des endomorphismes de E vérifiant :

$$[u\,,\,v] = 2v,\quad [u\,,\,w] = -2\,w,\quad [v\,,\,w] = u.$$

Deux quaternes $Q = (u\,,\,v\,,\,w\,,\,E)$ et $Q' = (u',\,v',\,w',\,E')$ sont dits *équivalents* s'il existe des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ de E et E' telles que :

$$\operatorname{Mat}(u;\mathscr{E}) = \operatorname{Mat}(u';\mathscr{E}'),\quad \operatorname{Mat}(v;\mathscr{E}) = \operatorname{Mat}(v';\mathscr{E}'),\quad \operatorname{Mat}(w;\mathscr{E}) = \operatorname{Mat}(w';\mathscr{E}').$$

Soit $Q = (u\,,\,v\,,\,w\,,\,E)$ un quaterne.

On note $\mathscr{T}(Q)$ l'ensemble $\{u\,,\,v\,,\,w\}$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est $\mathscr{T}(Q)$-stable si $f(x) \in F$ pour tout vecteur $x \in F$ et tout élément $f \in \mathscr{T}(Q)$. S'il en est ainsi, et si F est non réduit à $\{0\}$, on définit un quaterne $Q_F = (u_F,\,v_F,\,w_F,\,F)$ en notant respectivement u_F, v_F, w_F les restrictions de u, v, w à F.

Le quaterne Q est dit *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels $\mathscr{T}(Q)$-stables de E sont $\{0\}$ et E.

1. Soient r un entier strictement positif, E_r un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension r, et $\mathscr{E}_r = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de E_r. On définit des endomorphismes u_r, v_r et w_r de E_r par les formules suivantes :

$$u_r(e_i) = (r - 2i + 1)e_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r$$

$$v_r(e_1) = 0, \quad \text{et} \quad v_r(e_i) = (i-1)(r-i+1)e_{i-1} \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant r$$

$$w_r(e_r) = 0, \quad \text{et} \quad w_r(e_i) = e_{i+1} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r-1.$$

   a. Prouver que $Q^r = (u_r,\,v_r,\,w_r,\,E_r)$ est un quaterne.

   b. Soit x un élément non nul de E_r. Montrer qu'il existe un entier $s \in \mathbb{N}$ tel que le vecteur $(w_r)^s(x)$ soit non nul et colinéaire à e_r.

   En déduire que le quaterne Q^r est irréductible.

Tournez la page S.V.P.

2. Soient f, g, h des endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Établir la formule :

$$[f, gh] = [f, g]\,h + g[f, h].$$

3. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne.

a. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$[u, v^p] = 2p\,v^p, \quad [u, w^p] = -\,2p\,w^p.$$

b. En déduire que v et w sont des endomorphismes nilpotents de E.

c. Pour p entier strictement positif, établir les formules :

$$[w, v^p] = -\,p\bigl(u - (p-1)\mathrm{id}_E\bigr)v^{p-1}, \quad [v, w^p] = p\bigl(u + (p-1)\mathrm{id}_E\bigr)w^{p-1}.$$

4. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne. On note r le plus petit entier strictement positif tel que $v^r = 0$ (un tel entier existe d'après la question II.3.*b*.).

a. Soit z un vecteur de E tel que $y = v^{r-1}(z)$ soit non nul. Montrer que :

$$v(y) = 0, \quad u(y) = (r-1)\,y.$$

b. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_p = w^{p-1}(y).$$

Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u(x_p) = (r - 2p + 1)\,x_p.$$

Prouver qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$x_s \neq 0, \quad \text{et} \quad x_k = 0 \quad \text{pour} \quad k > s.$$

c. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :

$$v(x_p) = (p-1)(r-p+1)\,x_{p-1}.$$

d. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_s$, où s est l'entier défini à la question II.4.*b*.

Prouver que F est de dimension s et est $\mathcal{T}(Q)$-stable.

e. Montrer que la trace de la restriction de u à F est égale à :

$$s(r-s).$$

En déduire que $s = r$, puis que le quaterne $Q_F = (u_F, v_F, w_F, F)$ est équivalent au quaterne Q' défini à la question II.1.

f. Que peut-on dire si le quaterne Q est irréductible ?

PARTIE III

Pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on désigne par E^* l'espace vectoriel dual de E. Si $f \in E^*$, et si $x \in E$, on note $< f, x >$ pour $f(x)$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, ${}^t u$ désigne l'endomorphisme transposé de u. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, les endomorphismes $({}^t u)^p$ et ${}^t(u^p)$ sont égaux ; on les notera ${}^t u^p$. Si G est un sous-espace vectoriel de E^*, l'orthogonal $G^\perp$ de G est le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs $x \in E$ tels que $< f, x > = 0$ pour tout $f \in G$.

1. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne. Prouver que $Q^* = (-{}^t u, -{}^t v, -{}^t w, E^*)$ est un quaterne.

2. On reprend dans cette question les notations de la question II.4 : $Q = (u, v, w, E)$ est un quaterne, r est le plus petit entier strictement positif tel que $v^r = 0$, z est un vecteur de E tel que $y = v^{r-1}(z)$ soit non nul, et F est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $x_p = w^{p-1}(y)$ pour $1 \leqslant p \leqslant r$.

   De plus, on note Q^* le quaterne $(-{}^t u, -{}^t v, -{}^t w, E^*)$, et on fixe un élément h de E^* tel que $< h, y > = 1$. On pose $g = {}^t v^{r-1}(h)$, et on note G le sous-espace vectoriel de E^* engendré par les vecteurs $f_p = (-{}^t w)^{p-1}(g)$ pour $1 \leqslant p \leqslant r$.

   a. Vérifier que g est non nul. Prouver que F est $\mathcal{T}(Q)$-stable, que G est $\mathcal{T}(Q^*)$-stable, et que les quaternes Q_F et Q^*_G sont irréductibles et équivalents.

   b. Soient k et p des entiers de l'ensemble $\{1, 2, ..., r\}$. Établir les formules :

   $$< f_k, x_{r-k+1} > = (-1)^{k-1}\big((r-1)!\big)^2, \quad < f_k, x_p > = 0 \quad \text{si} \quad p + k > r + 1.$$

   c. Prouver que l'orthogonal $G^\perp$ de G est $\mathcal{T}(Q)$-stable, et que c'est un supplémentaire de F dans E.

   d. Montrer qu'il existe un entier $s \in \mathbb{N}^*$, et des sous-espaces vectoriels non nuls $F_1, ..., F_s$ de E vérifiant les conditions suivantes :

   i. $E = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_s$.

   ii. Pour $1 \leqslant i \leqslant s$, F_i est $\mathcal{T}(Q)$-stable.

   iii. Pour $1 \leqslant i \leqslant s$, le quaterne Q_{F_i} est irréductible, et équivalent au quaterne Q^{r_i}, où r_i est la dimension de F_i.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne. On considère deux décompositions :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_s = F'_1 \oplus F'_2 \oplus \dots \oplus F'_t$$

où $F_1, \dots, F_s, F'_1, \dots, F'_t$ sont des sous-espaces vectoriels non nuls et $\mathcal{T}(Q)$-stables de E, les quaternes $Q_{F_1}, \dots, Q_{F_s}, Q_{F'_1}, \dots, Q_{F'_t}$ étant irréductibles.

Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, on note U_i le sous-espace propre de u pour la valeur propre i.

a. Prouver que la dimension de U_0 (resp. U_1) est égale au nombre d'indices i tels que F_i soit de dimension impaire (resp. paire).

En déduire que $s = t$.

b. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, soit n_k le nombre d'indices i tels que F_i soit de dimension k. Établir la formule :

$$n_k = \dim U_{k-1} - \dim U_{k+1}.$$

En déduire qu'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, s\}$ telle que, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, les quaternes Q_{F_i} et $Q_{F'_{\sigma(i)}}$ soient équivalents.

PARTIE IV

Dans toute cette partie, $Q = (u, v, w, E)$ est un quaterne. On désigne par $F_1, \dots, F_s$ des sous-espaces vectoriels non nuls de E, $\mathcal{T}(Q)$-stables, vérifiant $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_s$, et tels que les quaternes Q_{F_i}, $1 \leqslant i \leqslant s$, soient irréductibles.

On note $\mathcal{C}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes θ de E qui vérifient :

$$[u, \theta] = [v, \theta] = [w, \theta] = 0.$$

1. Montrer que si Q est irréductible, on a $\mathcal{C} = \mathbb{R}\, \mathrm{id}_E$.

2. Soient θ un élément de $\mathcal{C}$ et i un entier appartenant à $\{1, 2, \dots, s\}$.

Prouver que $\theta(F_i)$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{T}(Q)$-stable de E. Montrer que si $\theta(F_i)$ est non nul, les quaternes Q_{F_i} et $Q_{\theta(F_i)}$ sont équivalents.

3. On définit un endomorphisme Δ de E par la formule :

$$\Delta = u^2 + 2\, vw + 2\, wv.$$

a. Soient j un entier appartenant à $\{1, 2, \dots, s\}$, et x un vecteur de F_j. Prouver que l'on a :

$$\Delta(x) = \left((\dim F_j)^2 - 1\right) x.$$

En déduire que Δ est un élément de $\mathcal{C}$.

b. On suppose dans cette question que les dimensions des F_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, sont deux à deux distinctes.

Soient θ un élément de $\mathcal{C}$, et i un entier appartenant à $\{1, 2, \dots, s\}$. Montrer que $\theta(F_i) \subset F_i$. En déduire que l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ est de dimension s.

4. Donner un exemple où $\mathcal{C}$ n'est ni de dimension 1, ni de dimension s.

XN 2

J. 2233

session de 1990

concours interne
et concours d'accès à l'échelle de rémunération des professeurs agrégés

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve conformément à la circulaire n° 86-828 du 28 juillet 1986.

La précision des démonstrations et la qualité de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

Les parties II, III, IV de ce problème étudient le groupe des homéomorphismes du cercle trigonométrique U du plan complexe. L'invariant « nombre de rotation » d'un homéomorphisme h de U a été découvert par H. Poincaré en 1885 ; sa définition, ses propriétés, font l'objet des parties III et IV. Au préalable, dans la partie I (relativement indépendante des suivantes), on étudie les fonctions solutions d'une équation aux différences finies qui intervient naturellement, et dans la partie II, on considère quelques exemples d'homéomorphismes de U.

Tournez la page S.V.P.

La composée de deux applications f et g sera notée $f \circ g$. Muni de cette loi de composition interne, l'ensemble S_X des bijections d'un ensemble X sur lui-même est un groupe (groupe des permutations de X). Comme dans tout groupe multiplicatif, pour $k \in \mathbb{N}_*$ nous noterons f^k le produit $f \circ f \circ \ldots \circ f$ de k éléments de S_X égaux à f, et f^{-k} le produit $f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$ de k éléments égaux à l'application réciproque f^{-1} et pour $k = 0$ on pose $f^0 = 1_X$ élément neutre du groupe S_X. Tout élément f de S_X définit une action du groupe $\mathbb{Z}$ sur X. Pour $x_0 \in$ X, on appelle orbite de x_0 sous l'action de f, la suite des éléments $x_k = f^k(x_0)$ de X, où $k \in \mathbb{Z}$, obtenue en itérant l'action de f et celle de f^{-1}.

Si X est un espace métrique, on appelle homéomorphisme de X, un élément f de S_X continu, ainsi que l'application réciproque f^{-1}. Les homéomorphismes de X constituent un sous-groupe H_X de S_X. Deux éléments f_1 et f_2 de H_X sont dits conjugués, s'il existe $g \in H_X$ tel que $f_2 = g^{-1} \circ f_1 \circ g$.

Dans la suite, nous noterons :

$E[x]$	la partie entière d'un nombre réel x (unique entier relatif tel que $E[x] \le x < E[x] + 1$) ;
$C(J)$	l'espace vectoriel réel des fonctions continues réelles sur un intervalle J de $\mathbb{R}$;
$\mathbb{R}[X]$	Le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ formé des fonctions polynomiales réelles d'une variable réelle ;
t	la translation $x \to x + 1$ sur $\mathbb{R}$;
D	l'opérateur aux différences finies $f \mapsto f \circ t - f$ de $C(\mathbb{R})$ dans $C(\mathbb{R})$.

I. ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION $Df = b$

Soit $b \in C(\mathbb{R})$. On se propose d'étudier les solutions $f \in C(\mathbb{R})$ de l'équation aux différences finies :

(1) $$Df = b \qquad \text{soit} \qquad f \circ t - f = b.$$

1. *a.* Caractériser les éléments du noyau de l'application linéaire D.

   b. Supposons donnée une solution $f_1 \in C(\mathbb{R})$ de l'équation (1). Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (1) ?

   c. Exemple. Quel est l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbb{R})$ telles que :

   $$f(x+1) - f(x) = \cos x \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (On remarquera qu'il existe une solution du type $x \mapsto a \sin x + b \cos x$.)

2. Dans cette question, la fonction b est constante égale à 1.

   a. Soit $f \in C(\mathbb{R})$ une solution de (1). Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$x + \alpha \le f(x) \le x + \beta \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

   b. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   c. Si f est de classe C^1, montrer que f est lipschitzienne, et que la constante de Lipschitz k de f vérifie $k \ge 1$.

   Si $k = 1$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x + \alpha$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3. Dans cette question, on suppose que $b \in \mathbb{R}[X]$.

   a. Si $f \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $Df = 0$, montrer que f est constante.

   b. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit P_k le polynôme défini de la manière suivante :

   $$P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad P_k(x) = \frac{1}{k!}\, x(x-1)\ldots(x-k+1) \quad \text{pour } k \ge 1.$$

   Pour $k \ge 1$, montrer que $DP_k = P_{k-1}$.

   c. Montrer que $P_0, P_1, \ldots, P_n$ constituent une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

   d. Pour $b \in \mathbb{R}[X]$, montrer que l'équation $Df = b$ possède une solution unique $f \in \mathbb{R}[X]$ telle que :

   $$f(0) = 0.$$

4. *a.* Soit $f \in C(\mathbb{R})$ une solution de (1). Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $n = E[x]$ et $u = x - n$. Montrer que :

$$f(x) = f(u) + \sum_{k=0}^{n-1} b(u+k) \qquad \text{pour} \quad x > 1,$$

$$f(x) = f(u) - \sum_{k=1}^{n} b(u-k) \qquad \text{pour} \quad x < 0.$$

b. On suppose que $b(x)$ tend vers une limite strictement positive quand x tend vers $+\infty$. Montrer que toute solution $f \in C(\mathbb{R})$ de (1) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Formuler et prouver une assertion analogue quand x tend vers $-\infty$.

5. Supposons b à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$. Supposons que (1) possède une solution $f \in C(\mathbb{R})$ bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que toute solution de (1) est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et que l'intégrale $\int_0^\infty h(s)\,ds$ est convergente. $\left(\text{On pourra exprimer } \int_0^t b(s)\,ds \text{ à l'aide de la fonction } f\right)$.

6. On suppose que b est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$ et telle que l'intégrale $\int_0^\infty b(s)\,ds$ soit convergente.

a. Montrer que toute solution $f \in C(\mathbb{R})$ de (1) est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b. On pose $f_0 = -\sum_{k=0}^{\infty} b \circ t^k$. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$, que la fonction f_0 est continue, solution de (1).

c. Montrer que $f_0(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$, et que c'est la seule solution de (1) ayant cette propriété.

7. Étude d'un exemple. La fonction trigonométrique tan définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque, notée ici Arc tan. On suppose dans cette question, que $b(x) = \operatorname{Arc\,tan}(e^{-x})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a. On pose $f = -\sum_{k=0}^{\infty} b \circ t^k$. Montrer que l'on définit ainsi une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, solution de (1).

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}x - f(1-x)$. Montrer que $D\phi = 0$.

En déduire que le graphe de f présente une direction asymptotique lorsque x tend vers $-\infty$.

c. Calculer la valeur moyenne $\int_0^1 \phi(x)\,dx$ de ϕ. Montrer que la fonction ϕ n'est pas constante (on vérifiera que sa dérivée d'ordre trois $\phi^{(3)}(0)$ n'est pas nulle).

d. Préciser le sens de variation de f. Étudier les branches infinies et la forme générale de son graphe.

II. EXEMPLES D'HOMÉOMORPHISMES DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Pour la commodité de l'expression, le plan (affine euclidien) muni d'un repère orthonormé d'origine O, sera identifié avec $\mathbb{C}$. On note U le cercle trigonométrique, ensemble des points M dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ a pour module un. On note H le groupe des homéomorphismes de U qui préservent l'orientation, c'est-à-dire tels que $h(z)$ décrive U dans le sens direct, lorsque z décrit U dans le sens direct. Si I et J sont deux points distincts de U, on notera [I, J] (respectivement]I, J[) l'arc du cercle U qui relie I à J dans le sens direct, bornes I et J comprises (respectivement bornes I et J non comprises).

On note G l'ensemble des fonctions $g \in C(\mathbb{R})$ qui sont strictement croissantes et vérifient $g \circ t = t \circ g$, soit :

$$g(x+1) = g(x) + 1 \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que G est un sous-groupe du groupe $H_{\mathbb{R}}$ des homéomorphismes de $\mathbb{R}$.

Tournez la page S.V.P.

2. Soit $h \in H$. Choisissons $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{2i\pi y_0} = h(1)$. Montrer qu'il existe $g \in G$ unique telle que $g(0) = y_0$ et $e^{2i\pi g(x)} = h(e^{2i\pi x})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   Si on remplace y_0 par $y_0 + k$ où $k \in \mathbb{Z}$, montrer que g est remplacée par $x \mapsto g(x) + k$.

3. Soit $g \in G$. Pour $z = e^{2i\pi x} \in U$, on pose $h(z) = e^{2i\pi g(x)}$. Montrer que $h(z)$ est bien défini (malgré la multiplicité des choix possibles de $x \in \mathbb{R}$ pour exprimer z) et que $h : z \mapsto h(z)$ est élément de H. Montrer que l'application ϕ qui à $g \in G$ associe cet élément $h \in H$ est un homomorphisme de groupes. Montrer que ϕ est surjectif, et préciser son noyau.

   Dans la suite, on dira que $g \in G$ définit $h \in H$ lorsque $\phi(g) = h$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On fait agir $\mathbb{Z}$ sur U par la rotation $R_\alpha \in H$ de centre O et d'angle $2\pi\alpha$.

   a. Quelles sont les fonctions $g \in G$ qui définissent R_α ?

   b. Soit $M_0 \in U$. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ distincts tels que $(R_\alpha)^p(M_0) = (R_\alpha)^q(M_0)$. Montrer que α est rationnel. Réciproquement, si α est rationnel, montrer que tout point de U a une orbite finie.

   c. Si α est irrationnel, montrer que tout point M_0 de U a une orbite $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ partout dense dans U (telle que pour tout couple (I, J) de points distincts de U, l'arc]I, J[contienne des points de la suite (M_k)).

5. Étude d'éléments particuliers du groupe H. Notons Δ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < 1$. Soient A, B deux points du plan, d'affixes $a \in \Delta$, $b \in \Delta$. À tout point M de U d'affixe z, on associe le point M' de U tel que les droites (AM) et (BM') soient parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ étant de même sens. On note $z' = h_{b,a}(z)$ l'affixe de M'.

   a. Pour a, b, c éléments de Δ, montrer que $h_{c,a} = h_{c,b} \circ h_{b,a}$, et illustrer par une figure cette propriété.

   b. Considérons $a \in \Delta$ et $b = 0$. Exprimer $z' = h_{0,a}(z)$ en fonction de z. Montrer que $h_{0,a}$ est élément de H.

   Pour $a, b \in \Delta$, montrer que $h_{b,a} \in H$.

   c. Supposons que $b = -a \in \Delta$. Montrer que $h_{-a,a}$ est définie par $h_{-a,a}(z) = \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ où $\bar{a}$ est l'imaginaire conjugué de a.

   d. On suppose que $a \in \Delta$, $b \in \Delta$ sont distincts. On note I, J les points d'intersection de U avec la droite (AB) (les points I, A, B, J se présentant dans cet ordre sur la droite (AB) orientée par $\overrightarrow{AB}$). Soit M_0 un point de l'arc]I, J[.

   Sur une figure, construire les premiers points ... M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, ... de l'orbite de M_0. Montrer que M_k tend vers une limite lorsque k tend vers $+\infty$, et de même lorsque k tend vers $-\infty$.

   Montrer que dans le groupe H, l'homéomorphisme $h_{b,a}$ n'est conjugué d'aucune rotation R_α (où $\alpha \in \mathbb{R}$).

   e. Soit A un point du plan affine, d'affixe $a \in \Delta$. À tout point M de U d'affixe z, on associe l'autre point M' d'intersection de la droite (AM) avec U. Calculer l'affixe $z' = h_a(z)$ de M'. Montrer que h_a est un élément de H, conjugué d'une rotation R_α pour une valeur de α que l'on précisera.

III. NOMBRE DE ROTATION D'UN HOMÉOMORPHISME DE U

On conserve toutes les notations de la partie II. On considère $g \in G$ et $h \in H$ défini par g (voir II.3.).

1. Soient x_0, x_1 deux réels. Montrer que la partie entière de $g^n(x_1) - g^n(x_0)$ ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{g^n(x_0)}{n} - \dfrac{g^n(x_1)}{n} \right| = 0$.

2. On suppose qu'il existe $M_0 \in U$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $h^m(M_0) = M_0$.

   Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $g^m(x_0) = x_0 + p$. Calculer $g^{km}(x_0)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et montrer que $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{g^{km}(x_0)}{km} = \dfrac{p}{m}$. En déduire que $\dfrac{g^n(x_0)}{n}$ tend vers $\dfrac{p}{m}$ lorsque n tend vers $+\infty$. $\left(\text{On pourra considérer la partie entière } k \text{ de } \dfrac{n}{m}\right)$.

3. Supposons, au contraire de 2., que pour tout $m \in \mathbb{N}_*$ l'homéomorphisme h^m de U ne possède aucun point fixe. Soient $p \in \mathbb{N}_*$ et $q \in \mathbb{N}_*$.

Soit $a = E[g^p(0)]$. Montrer que $x + a < g^p(x) < x + a + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Établir alors que $x + ka < g^{pk}(x) < x + k(a + 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $k \in \mathbb{N}_*$.

En déduire que :

$$\left|\frac{g^{pq}(0)}{pq} - \frac{g^p(0)}{p}\right| < \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{g^p(0)}{p} - \frac{g^q(0)}{q}\right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Montrer que la suite des réels $\dfrac{g^n(0)}{n}$, où $n \in \mathbb{N}_*$, tend vers une limite $r(g)$ dans $\mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. *a.* Des trois questions précédentes, déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $\dfrac{g^n(x)}{n}$, où $n \in \mathbb{N}_*$, admet une limite dans $\mathbb{R}$, que cette limite ne dépend pas du choix de $x \in \mathbb{R}$. On la notera $r(g)$.

b. Montrer que $r(g^m) = mr(g)$ pour $m \in \mathbb{N}$.

5. Soit $g_1 \in$ G qui commute avec g (tel que $g_1 \circ g = g \circ g_1$). Soit $m \in \mathbb{N}_*$.

a. Montrer qu'on peut choisir $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant $p - 1 < mr(g) < p + 1$. Montrer qu'il existe alors $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq k_0$,

$$g_1^{km}(0) + k(p-1) < (g_1 \circ g)^{km}(0) < g_1^{km}(0) + k(p+1).$$

En déduire que $r(g_1 \circ g) = r(g_1) + r(g)$.

b. S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g_1(x_0) \leq g(x_0)$, montrer que l'on a $r(g_1) \leq r(g)$.

6. Soit $g' \in$ G un autre élément tel que $\phi(g') = h$; montrer que $r(g') - r(g) \in \mathbb{Z}$.

On notera $r(h)$ la valeur modulo $\mathbb{Z}$ de $r(g)$, et on l'appellera le nombre de rotation de $h \in$ H.

Soient h_1, h_2 deux éléments de H qui sont conjugués. Montrer qu'il existe des éléments g_1, g_2 de G définissant h_1, h_2 et $g_0 \in$ G tels que $g_2^n \circ g_0 = g_0 \circ g_1^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $g_1^n(x) + \alpha \leq g_2^n(g_0(x)) \leq g_1^n(x) + \beta$ pour $x \in \mathbb{R}$, et enfin que $r(h_1) = r(h_2)$.

7. On fait l'hypothèse que $r(g) = 0$.

On suppose $0 < g(0)$. Montrer que l'on a $g^n(0) < 1$ pour $n \in \mathbb{N}_*$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que la suite $g^n(0)$ a une limite $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $g(x_0) = x_0$.

Si on suppose $g(0) < 0$, prouver de même que g possède un point fixe.

Réciproquement, si g possède un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer que $r(g) = 0$.

8. *a.* Supposons que $r(g)$ soit un rationnel $\dfrac{p}{m}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}_*$. On pose $f(x) = g^m(x) - p$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f possède un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que $h \in$ H possède une orbite finie si et seulement si $r(h)$ est un rationnel modulo $\mathbb{Z}$.

9. Calculer $r(h)$ lorsque $h \in$ H est la rotation R_α d'angle $2\pi\alpha$ (voir II.4.), lorsque $h = h_{b,a}$ où $a \in \Delta$, $b \in \Delta$ (voir II.5.), lorsque $h = h_a$ où $a \in \Delta$ (voir II.5.c.).

10. On va établir maintenant une propriété de continuité de l'application $g \mapsto r(g)$ de G dans $\mathbb{R}$. Pour $g \in$ G, $g' \in$ G, on pose $d(g, g') = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - g'(x)|$.

a. Justifier l'existence du réel $d(g, g')$. Soient $g_0 \in$ G, $g'_0 \in$ G et $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour $g \in$ G, $g' \in$ G la condition ($d(g, g_0) < \eta$ et $d(g', g'_0) < \eta$) implique $d(g \circ g', g_0 \circ g'_0) < \varepsilon$.

Tournez la page S.V.P.

b. Considérons $g_0 \in G$ et soit $\varepsilon > 0$. On choisit $q \in \mathbb{N}_*$ tel que :

$$\frac{2}{q} < \varepsilon \quad \text{puis} \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad \frac{p-1}{q} < r(g_0) < \frac{p+1}{q}$$

Montrer que $x + p - 1 < g_0^q(x) < x + p + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. Montrer qu'il existe alors $\delta > 0$ tel que $x + p - 1 + \delta \leq g_0^q(x) \leq x + p + 1 - \delta$ pour $x \in \mathbb{R}$.

d. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour $g \in G$, la condition $d(g, g_0) < \eta$ implique $d(g^q, g_0^q) < \delta$. En déduire alors $x + p - 1 < g^q(x) < x + p + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis :

$$\frac{p-1}{q} \leq r(g) \leq \frac{p+1}{q} \quad \text{et enfin} \quad |r(g) - r(g_0)| < \varepsilon.$$

IV. HOMÉOMORPHISMES DONT LE NOMBRE DE ROTATIONS EST IRRATIONNEL

On conserve les notations des parties II et III. Soit $h \in H$ dont le nombre de rotations $\alpha = r(h)$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ modulo $\mathbb{Z}$. Pour tout $z \in U$, nous considérerons les deux suites $P(z) = (h^n(z))$ et $Q(z) = (h^{-n}(z))$, où $n \in \mathbb{N}$, dont la réunion constitue l'orbite de z. Rappelons qu'on appelle valeur d'adhérence d'une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes, tout élément de $\mathbb{C}$ qui est limite d'une sous-suite de (z_n).

1. Soit $z_0 \in U$. Considérons des éléments m, n de $\mathbb{N}$ avec $m < n$ et $J = [h^m(z_0), h^n(z_0)]$.

   Montrer que pour k assez grand, les arcs de cercle adjacents J, $h^{n-m}(J)$, $h^{2(n-m)}(J)$, ..., $h^{k(n-m)}(J)$ recouvrent U.

   En déduire que pour tout $z_1 \in U$, l'intersection de $P(z_1)$ avec J est non vide. Montrer de même que l'intersection de $Q(z_1)$ avec J est non vide.

2. Soient z_0 et z_1 deux éléments distincts de U. Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite $P(z_0)$ est aussi une valeur d'adhérence de chacune des suites $P(z_1)$ et $Q(z_1)$.

   Montrer de même que toute valeur d'adhérence de la suite $Q(z_0)$ est une valeur d'adhérence de chacune des suites $P(z_1)$ et $Q(z_1)$.

3. D'après 2., l'ensemble X des valeurs d'adhérence de la suite $P(z)$ est le même pour tous les éléments z de U. Il ne dépend donc que de $h \in H$.

   a. Montrer que X est une partie fermée de U, invariante par h (telle que $h(X) = X$).

   b. Montrer que X n'a pas de point isolé, c'est-à-dire que tout point z de X est limite d'une suite de points distincts de X.

   c. Montrer que cette partie fermée X de U, invariante par h est minimale dans le sens suivant : si une partie fermée Y de X est invariante par h, non vide, alors $Y = X$.

4. Si X est distinct de U, on veut montrer que X n'est nulle part dense dans U, c'est-à-dire ne contient aucun arc $J = [z_1, z_2]$, où $z_1 \neq z_2$, de U.

   Supposons au contraire qu'un tel arc $J = [z_1, z_2]$ soit contenu dans X.

   Soit $z_0 \in U$. Montrer qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \neq n$ tels que l'arc $J_0 = [h^m(z_0), h^n(z_0)]$ soit contenu dans X. En considérant la réunion de J_0, $h^{n-m}(J_0)$, ..., $h^{k(n-m)}(J_0)$, montrer que $X = U$.

5. Si X est distinct de U, montrer que h ne peut pas être conjugué de la rotation R_α d'angle $2\pi\alpha$.