Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher "de beaux problèmes" ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leut imagination créatrice

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

M.Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 181 (Eugène EHRHART, Strasbourg)

Construire un point dont la somme des distances à quatre points donnés du plan soit minimum.

ÉNONCÉ N° 182 (Maurice CRESTEY, Vincennes)

Existe-til des polygones réguliers, autres que des carrés, dont tous les sommets sont les nœuds d'un quadrillage à mailles carrées.

ÉNONCÉ n°183 (Louis MORDEFROID, Lons-le-Saunier)

Etant donnés n réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ on construit une suite (u_k) en posant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, puis, pour tout $1, \leq k \leq n$, $u_{k+1} = a_k u_k + u_{k-1}$. Posons $[a_1, a_2, \dots, a_n] = u_{n+1}$. Comparer $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ et $[a_n, \dots, a_2, a_1]$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°165 (FRANÇOIS LO JACOMO , Paris)

Existe-t-il un entier naturel n admettant plusieurs diviseurs dans l'intervalle $[\sqrt{n}\ , \sqrt{n} + \sqrt{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}]$?

SOLUTION de l'auteur

La fonction $f : t \to t + \frac{n}{t}$ est croissante sur $[\sqrt{n}\ , n\ ]$ donc injective.

En $\sqrt{n}$ elle vaut $2\sqrt{n}$, et vaut $2\sqrt{n} + 1$ en $t = \sqrt{n} + \sqrt{\sqrt{n} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$,

car $\left(\sqrt{n} - \sqrt{\sqrt{n} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{\sqrt{n} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right) = n$.

Puisque $\sqrt{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} < \sqrt{\sqrt{n} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$ la fonction f est injective sur l'intervalle $[\sqrt{n}\ , \sqrt{n} + \sqrt{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}]$ et prend ses valeurs sur l'intervalle $[2\sqrt{n}\ , 2\sqrt{n} + 1[$. Par suite, f ne peut prendre au plus qu'une valeur entière sur l'intervalle $[\sqrt{n}\ , \sqrt{n} + \sqrt{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}]$, ce qui entraîne qu'il existe au plus une valeur de t telle que $t \in \mathbf{N}$ et $\frac{n}{t} \in \mathbf{N}$, donc n *admet au plus un diviseur dans l'intervalle donné.*

Autres solutions

Jean Pierre ADAM (Figeac) , Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Gérald GOUBY (Figeac), Jacques MOISAN (Tours), Charles NOTARI (Noë).

Remarque :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers n admettant deux diviseurs distincts sur l'intervalle $[\sqrt{n}\ ,\ \sqrt{n} + \sqrt{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} + \varepsilon\ ]$: il suffit de choisir $n = k^4 - k^2$ pour k assez grand, les deux diviseurs étant k^2 et $k^2 + k$. La vérification est laissée aux soins du lecteur.

ÉNONCÉ N° 166 (Gérard LAVAU , Mesnil-Esnard)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n - \exp\left(-\frac{1}{u_n^2}\right).$$

SOLUTION de l'auteur

1) Montrons que u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

◊ $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante. En effet, $\exp(-\frac{1}{u_n^2})$ est positif, donc $u_{n+1} \leq u_n$.

◊ $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est minorée par 0. Il suffit pour cela de montrer que :

$\forall x > 0\ , f(x) > 0$, où l'on a posé $f(x) = x - \exp(-\frac{1}{x^2})$ (On peut d'ailleurs prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$).Posons $y = \frac{1}{x^2}$

On a : $\qquad f(x) > 0 \iff x > \exp\left(-1/x^2\right)$

$$\iff 1/\sqrt{y} > e^{-y}$$

$$\iff -\ln y/2 > -y$$

$$\iff 2y - \ln y > 0$$

Cette dernière fonction de y a pour dérivée $2 - 1/y$, est décroissante sur $]0\,,1/2[$ et croissante sur $]1/2\,,+\infty[$. Sa valeur en $1/2$ est $1 + \ln 2$ qui est bien positif.

La suite $(u_n)_{n\in N}$ étant décroissante minorée par 0, converge vers un nombre positif ou nul l. De $u_{n+1} = f(u_n)$, en passant à la limite, on obtient $l = f(l)$. Or la seule solution de cette équation est 0.

2) Cherchons un équivalent de u_n.

Ecrivons $u_{n+1} = u_n(1 + v_n)$ avec $v_n = -\exp(1/u_n^2)/u_n$. Il n'est pas difficile de voir que v_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (limite du type $\sqrt{x}\,e^{-x}$ lorsque x tend vers $+\infty$).

Calculons la quantité suivante :

$$E_n = u_{n+1}^3 \cdot \exp(1/u_{n+1}^2) - u_n^3 \cdot \exp(1/u_n^2)$$

$$= u_n^3 \cdot (1 + v_n)^3 \cdot e^{\frac{1}{u_n^2(1+v_n)^2}} - u_n^3 \cdot e^{\frac{1}{u_n^2}}$$

$$= u_n^3 . e^{\frac{1}{u_0^2}} \left[(1+v_n)^3 . e^{\frac{1}{u_n^2}\left[\frac{1}{(1+v_n)^2} - 1\right]} - 1\right]$$

$$= u_n^3 . e^{\frac{1}{u_0^2}} . \Big[\underbrace{(1+v_n)^3 \left[e^{\frac{1}{u_n^2}\left[\frac{1}{(1+v_n)^2} - 1\right]} - 1\right]}_{\text{Quantité A}} + \underbrace{(1+v_n)^3 - 1}_{\text{Quantité B}} \Big]$$

Considérons la quantité en exposant : $\frac{1}{u_n^2}\left[\frac{1}{(1+v_n)^2} - 1\right]$

Puisque v_n tend vers zéro,, cette quantité est équivalente à $- 2v_n / u_n^2$, qui est égale à $- 2\exp(-1/u_n^2) / u_n^3$. Cette quantité tend vers zéro lorsque n tend vers $+ \infty$ (limite du type $x^{3/2} e^{-x}$ lorsque x tend vers $+ \infty$). Par conséquent, en utilisant le fait que $e^x - 1$ est équivalent à x au voisinage de 0, on en déduit que la quantité A est équivalente à :

$$(1+v_n)^3 \frac{1}{u_n^2}\left[\frac{1}{(1+v_n)^2} - 1\right] \sim -{}^{2v_n}\!\Big/_{u_n^2} \quad .$$

Quant à la quantité B, elle est équivalente à $3v_n$. En outre $3v_n$ est négligeable devant $-2v_n /u_n^2$ puisque $1/u_n^2$ tend vers l'infini. Un équivalent de la somme des quantités A et B est donc $-2v_n /u_n^2$, et un équivalent de E_n est $- 2u_n.v_n.\exp(1/u_n^2)$. Si on remplace v_n par son expression, on trouve 2.

Ainsi E_n tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$. Le théorème de Césaro permet d'affirmer qu'il en est de même de la moyenne $(E_0 + E_1 + \ldots + E_{n-1})/n$. Cette dernière quantité vaut : $[u_n^3.\exp(1/u_n^2) - u_0^3.\exp(1/u_0^2)]/n$. On en déduit donc que $u_n^3.\exp(1/u_n^2)$ est équivalent à $2n$ lorsque n tend vers l'infini. D'où en passant aux logarithmes (ce passage est légitime lorsque les deux équivalents tendent vers $+\infty$), on obtient :

$$3\ln(u_n) + 1/u_n^2 \sim \ln(2n) = \ln 2 + \ln(n) \sim \ln(n)$$

Enfin, puisque u_n tend vers 0, $\ln(u_n)$ est négligeable devant $1/u_n^2$ et le premier membre est équivalent à $1/u_n^2$. Ainsi : $1/u_n^2 \sim \ln(n)$

$$\Rightarrow \quad u_n \sim 1/\sqrt{\ln(n)} \, .$$

La convergence est très lente. On peut estimer qu'on obtiendra u_n de l'ordre de 1/10 en partant de $u_0 = 1$, par exemple, au bout de $2,7.10^{43}$ itérations!!! (l'âge de l'Univers est loin d'y suffire).

Autres solutions :
Roger CUCULIERE (RABAT), Robert FERREOL (Paris), Gérald GOUBY (Figeac), François LO JACOMO (Paris), Jacques MOISAN (Tours), Charles NOTARI (Noë), Joseph VENTURA (Ajaccio).

D'autre part, deux lecteurs répondent que la suite (u_n) tend vers $-\infty$.

Remarque :

Roger CUCULIERE et François LO JACOMO précisent le comportement de u_n et démontrent :

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{1/2}} - \frac{3}{4}\frac{\ln \ln n}{(\ln n)^{3/2}} - \frac{\ln 2}{2(\ln n)^{3/2}} + \frac{\varepsilon(n)}{(\ln n)^{3/2}}$$

avec $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon(n) = 0$.

Commentaire de l'auteur :

µOrigine de cet exercice :

J'ai étudié l'année dernière avec mes élèves (Sup Agro) des suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et leur vitesse de convergence. Pour simplifier, nous supposerons que u_n converge vers 0 (et donc, $f(0) = 0$), f étant de classe C^∞. voici quelques résultats, dont les premiers sont assez classiques :

i) Si $f'(0) = 0$, la convergence est très rapide. En effet, si M est un majorant de $|f''|$, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, en 0, on prouve que $|u_{n+1}| \leq M/2\, u_n^2$. D'où, par récurrence :

$$|u_n| \leq 2/M\ |Mu_0/2|^{2^n} \text{ pour } n \geq 1.$$

C'est un type de convergence pour lequel, par exemple, le nombre de décimales exactes de la limite double à chaque itération. Voici deux suites qui ont une telle vitesse de convergence :

$u_{n+1} = 4\mu u_n(1 - u_n)$ pour $\mu = 1/2$. La limite est $l = 1/2$.

$u_{n+1} = u_n - f(u_n)/f'(u_n)$, suite utilisée dans la méthode de Newton pour la résolution approchée d'équations $f(x) = 0$.

ii) Si $0 < |f'(0)| < 1$, la convergence est celle d'une suite géométrique. Soit M un majorant de $|f'|$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, en 0, on obtient : $|u_{n+1}| \leq M\,|u_n|$. D'où, par récurrence :

$$|u_n| \leq M^n\,|u_0|\,.$$

C'est un type de convergence pour lequel, par exemple, le nombre de décimales exactes de la limite augmente de 1 à chaque itération. Voici une suite ayant une telle vitesse :

$$u_{n+1} = 4\mu u_n(1 - u_n) \text{ pour } 0 < \mu < 3/4 \text{ et } \mu \neq 1/2$$

iii) Si $|f'(0)| = 1$, la convergence est très lente. Supposons par exemple $f'(0) = 1$. Toujours avec Taylor-Lagrange, on a :

$$u_{n+1} = u_n + f''(c)u_n^2/2 \text{ avec } c \text{ compris entre } 0 \text{ et } u_n.$$

D'où : $$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n + f''(c)u_n^2/2} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1}{u_n}\left[\frac{1}{1 + f''(c)u_n/2} - 1\right]$$

$$= \frac{-f''(c)/2}{1 + f''(c)u_n/2}$$

qui tend vers $-f''(0)/2$ lorsque n tend vers l'infini. (u_n tend vers 0, donc c aussi). Si $f''(0)$ est non nul, par un argument analogue à celui que j'ai utilisé dans mon énoncé ci-dessus (théorème de Césaro), on prouve que u_n est équivalent à $-2/nf''(0)$.

C'est un type de convergence pour lequel, par exemple, il faut doubler le nombre d'itérations pour augmenter de 1 le nombre de décimales exactes de la limite. Voici une suite ayant une telle vitesse :

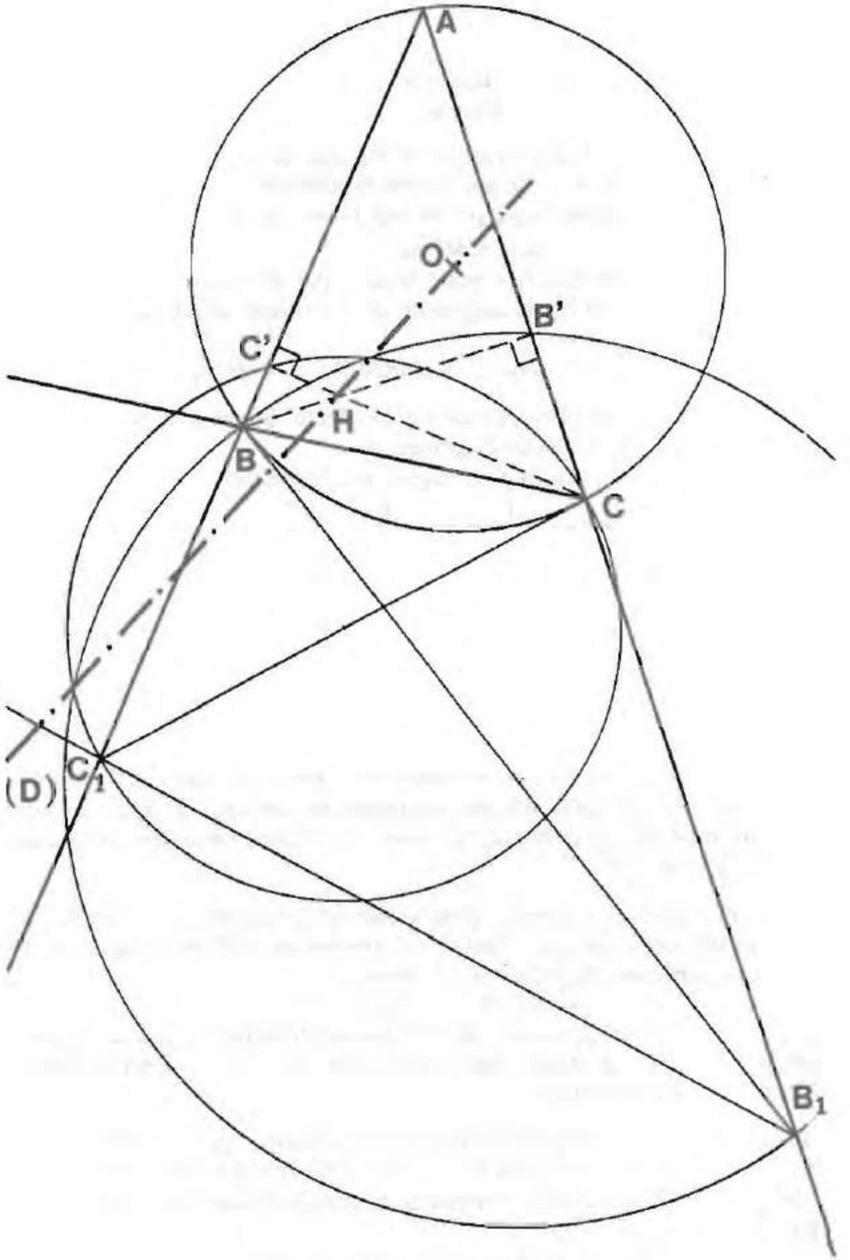
$$u_{n+1} = 4\mu u_n(1 - u_n) \text{ pour } \mu = 3/4.$$

(Signalons également qu'au-delà de 3/4, la suite bifurque vers deux valeurs d'adhérence. C'est un phénomène très curieux qui a fait - et fait encore - l'objet de nombreuses études).

iv) Je me suis alors posé le problème suivant : que se passe-t-il si $f'(0) = 1$ et $f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = 0, \ldots, f^{(k+1)}(0) = 0$ et $f^{(k)}(0) \neq 0$?

On procède d'une manière analogue au iii), mais avec des puissances différentes.

$u_{n+1} = u_n + f^{(k)}(c)u_n^k/k!$ avec c compris entre 0 et u_n.


A
O
B'
C'
H
B
C
(D)
C_1
B_1

D'où : $\dfrac{1}{u_{n+1}^{k-1}} - \dfrac{1}{u_n^{k-1}} = \dfrac{1}{\left[u_n + f^{(k)}(c)u_n^k / k!\right]^{k-1}} - \dfrac{1}{u_n^{k-1}}$

$$= \frac{1}{u_{n+1}^{k-1}} + \left[\frac{1}{\left[1 + f^{(k)}(c)u_n^{k-1} / k!\right]^{k-1}} - 1\right]$$

$$\sim - (k-1) f^{(k)}(c) / k!$$

qui tend vers $-(k-1) f^{(k)}(0) / k!$ lorsque n tend vers l'infini. (u_n tend vers 0, donc c aussi). Toujours avec Césaro, on prouve que $\dfrac{1}{u_n^{k-1}}$ est équivalent à $-n(k-1)f^{(k)}(0) / k!$ et donc, que u_n est de l'ordre de$1/n^{(k-1)}$. Plus il y a de dérivées nulles, plus la convergence est lente (ce dont on pouvait se douter).

v) D'où un dernier problème : que se passe-t-il si toutes les dérivées à partir de la deuxième sont nulles ? C'est ainsi que j'ai été amené à étudier la suite que je propose en exercice. Pour trouver un équivalent de u_n, j'avais une piste, essayer d'utiliser le théorème de Césaro. Il m'a fallu un certain temps pour trouver quelle différence de termes utiliser.

ÉNONCÉ N° 167 (André ANGLÉS, Limoges).

Démontrer que la directrice de la parabole tangente aux trois côtés d'un triangle non isocèle et à la droite contenant les centres des trois cercles d'Apollonius du triangle est la droite d'Euler de ce triangle. *(Cercle d'Apollonius : cercle dont un diamètre a pour extrêmités les points d'intersection des bissectrices d'un angle du triangle avec le côté opposé à ce sommet).*

SOLUTION (Charles NOTARI, Noë)

Note préliminaire : Les connaissances sous-jacentes à cette solution se trouvent clairement exposées dans le beau livre d'Yvonne et René SORTAIS (Le Mans) : *La géométrie du triangle*, Hermann 1987 :
- droite d'Euler : page 8
- droite de Simson et de Steiner : pages 42 et 43 ;
- parabole tangente aux quatre côtés d'un quadrilatère complet : page 70 ;
- puissance d'un point par rapport à un cercle, orthogonalité : page 176 ;
- cercle d'Apollonius : pages 194 et 196.

Soit ABC le triangle donné, (O) son cercle circonscrit, de centre O, (C_1) le cercle d'Apollonius centre sur (AB) en C_1 et (B_1) le cercle d'Apollonius centré sur (AC) en B_1. Soit A_1 le point commun à (BC) et (B_1C_1).

Les quatre droites (AB), (BC), (CA), (B_1C_1) sont les côtés d'un quadrilatère complet composé de quatre triangles dont les cercles circonscrits se coupent en un point F, foyer de la parabole tangente à ces quatre droites. La directrice (D) de la parabole est la droite de Steiner de F relativement aux quatre triangles, elle passe par leurs orthocentres.

Le cercle (B_1) découpe sur [AC] une division harmonique, donc est orthogonal au cercle (O). De même (C_1) est orthogonal à (O). Par suite, le cercle de diamètre $[BB_1]$ tangent en B à (B_1) est orthogonal à (O), de même le cercle de diamètre $[CC_1]$ est orthogonal à (O). Donc O a même puissance par rapport à ces deux cercles.

Les orthocentres des quatre triangles ABC, AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C ont également même puissance par rapport aux cercles de diamètres $[BB_1]$ et $[CC_1]$. Montrons le par exemple pour H, intersection des hauteurs (BB') et (CC") dans ABC : $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB_1} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HB}.\overline{HC} = \overline{HC}.\overline{HC'} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC_1}$. Par suite, la droite (D) est l'axe radical des cercles de diamètres $[BB_1]$ et $[CC_1]$ contenant O et H, (D) est la droite d'Euler du triangle ABC.

Autres solutions :
André ANGLÉS pour le Collège L.LIMOSIN (Limoges), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Georges LION (Limoges), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre).

Remarques :

1) La démonstration ci-dessus prouve que les cercles de diamètres $[AA_1]$, $[BB_1]$ et $[CC_1]$ appartiennent à un même fasceau, par suite leurs centres sont alignés (sur une perpendiculaire à (D)). Nous retrouvons le fait que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés (Newton).

2) Edgard DELPLANCHE donne une cinquième tangente remarquable à la parabole, il s'agit de l'isotomique de l'axe orthique (référence : *La géométrie du triangle* de LALESCO)

ÉNONCÉ N° 168 (Dominique ROUX (Limoges)

M étant dans le plan d'un triangle ABC donné, on construit les points A', B', C', intersections des droites (MA), (MB), (MC) avec respectivement les droites (BC), (CA), (AB). Déterminer M tel que AA' = BB' = CC'.

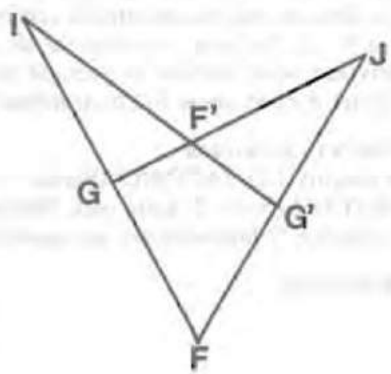
SOLUTION

Traçons trois cercles de même rayon R et de centres A, B, C, coupant les côtés respectivement opposés en A' et A", B' et B", C' et C". *Montrons que les droites (AA'), (AA"), (BB'), (BB"), (CC'), (CC") sont tangentes à une même conique*. En exceptant (AA'), les cinq autres droites pour une valeur R_1 du rayon sont tangentes à une conique et pour une autre valeur R_2 du rayon sont tangentes à une autre conique. Ces deux coniques déterminent un fasceau tangentiel (F).

Rappelons qu'un faisceau tangentiel de coniques peut être considéré comme ensemble des coniques tangentes à quatre droites (distinctes ou confondues) et que (théorème de PLÜCKER) pour tout point P non situé sur ces quatre droites, les tangentes menées de P aux coniques du faisceau sont deux droites qui se correspondent dans une involution (Cf Cours de Mathématiques spéciales CAGNAC, RAMIS, COMMEAU tome 3 page 497, MASSON 1965).

Donc, les tangentes menées de B aux coniques du faisceau (F) forment un faisceau de droites en involution, dont les droites doubles : la hauteur issue de B (cas où R est la distance de B à (AC)) et la parallèle à (AC) passant par B (cas où R est infini) sont deux droites perpendiculaires. Par suite, les droites isotropes issues de B sont l'un des couples de rayons conjugués du faisceau. De même en C.

Mais si les droites isotropes issues de B étaient tangentes à une conique propre du faisceau (F), par définition, elles joindraient B aux points communs (réels ou imaginaires) d'un cercle de centre B avec (AC), alors que ces droites sont tangentes à un tel cercle en I et J points cycliques : contradiction. Par suite, les droites isotropes issues de B appartiennent à une des coniques dégénérées du faisceau tangentiel (F). De même pour les droites isotropes



issues de C. Il en résulte que le couple de faisceau de droites ayant pour points fixes I et J constituc l'une des trois coniques dégénérées du faisceau (F), lequel est donc l'ensemble des coniques tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère complet dont deux sommets opposés sont I et J, deux autres sommets opposés sont deux points F et F' et les deux derniers sont deux points G et G'(voir figure) . Par la définition plückerienne des foyers (référence citée, page 532), cela signifie que le faisceau (F) est constitué de coniques homofocales de foyers F, F' et G, G' fixes, pour tout R. (on choisit F, F' réels et G, G' imaginaires).

Donc les tangentes menées de A aux coniques du faisceau (F) sont dans une involution dont l'un des couples de rayons conjugués est (AI, AJ) et par suite a ses rayons doubles orthogonaux, ce sont les bissectrices du couple (AF,AF'). Or, de ce qui précède, nous savons que les coniques du faisceau (F) sont celles tangentes, lorsque R varie, aux cinq droites (AA"), (BB'), (BB"), (CC'), (CC"). En faisant tendre R vers l'infini, nous obtenons une ellipse tangente en B à la parallèle à (AC) passant par B, tangente en C à la parallèle à (AB) passant par C et tangente à la parallèle à (BC) passant par A. Cette ellipse unique, qui se déduit de l'ellipse tangente aux côtés de ABC en leurs milieux par l'homothétie de centre G (centre de gravité de ABC) et de rapport 2 s'appelle l'ellipse circonscrite de STEINER. L'ellipse précédente a déjà été rencontrée : voir *Bulletin* n°360 page 469 ou *Bulletin* n°367 page 109. Cela propuve que la tangente issue de A est une bissectrice du couple (AF,AF'), or elle est également bissectrice du couple (AA',AA"), finalement si AA" est tangente à une conique de (F), AA' l'est aussi, à la même conique.

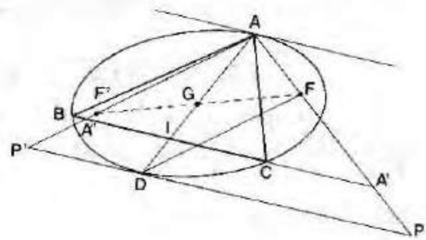
Puisqu'on ne peut pas mener d'un point trois tangentes distinctes à une conique propre, le problème posé se résoud maintenant aisément : pour que (AA'), (BB'), (CC') soient concourantes, il faut, en omettant les cas triviaux où deux de ces droites seraient confondues, que *M soit l'un des deux foyers F ou F' de l'ellipse circonscrite de STEINER du triangle ABC*. Les 6 cas triviaux sont obtenus en prenant les intersections avec (BC) du cercle de centre A et de rayon BC, et de même pour (AB) et (AC).

Autres solutions :
François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë). D'autre part, Philippe DELEHAM (Reims) signale comme référence *"l'Intermédiaire des mathématiciens"*, année 1910, pages 256 à 260.

Remarque :

La longueur commune AA' = BB' = CC' est égale à $\frac{3}{2}a$ où a désigne le demi grand axe de l'ellipse circonscrite de STEINER.

En effet, soit D le symétrique de A par rapport à G, centre de gravité de ABC et centre de l'ellipse. Les tangentes en A et en D sont parallèles à (BC) et font des angles égaux avec AF' et AF. Par suite (voir figure) les triangles AA'A" et APP' sont isocèles.



Grâce à la symétrie de centre G, nous voyons que [FD] et [AF'] sont parallèles et de même longueur. De plus, DFP est isocèle. Comme (BC) coupe [DG] en son milieu I, on a :

$AI = \frac{3}{4}AD$ d'où $AA' = \frac{3}{4}AP$ (Théorème de THALES)

Or, AP = AF + FP = AF + FD = AF + AF' = $2a$.

Finalement, $AA" = AA' = \frac{3}{4} \times 2a = \frac{3}{2}a$.

COURRIER DE LECTEURS

I) Solution parvenue tardivement au responsable de la rubrique :

Daniel SAADA (Rambouillt) : n° 159

Pierre SAMUEL (Orsay) : n°152 et n°154.

II) Vincent THILL (Migennes) remarque que :

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = 2{,}5\ ;$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 4\ ;$$

$$\frac{4+\sqrt{7}}{2} + \sqrt{7}\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}} = 5{,}5$$

et demande si en continuant ainsi, on obtient les termes d'une suite arithmétique de raison 1,5 et de premier terme 1.

Daniel REISZ (Vincelles) lui répond affirmativement en prouvant que

$$X(a) = \frac{a+\sqrt{2a-1}}{2} + \sqrt{2a-1}\sqrt{\frac{a-\sqrt{2a-1}}{2}} \text{ pour } a \geq 1$$

est égal à : $X(a) = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}$. En effet, cela résulte de l'égalité :

$a - \sqrt{2a-1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-1} - 1\right)^2$, d'où, puisque $\sqrt{2a-1} - 1 \geq 0$,

$\sqrt{\frac{a-\sqrt{2a-1}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-1} - 1\right)$ et $X(a) = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2a-1}}{2} + \frac{2a-1}{2} - \frac{\sqrt{2a-1}}{2}$

donc $X(a) = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}$.

III) Un copieux courrier du Collège LEONARD LIMOSIN (Limoges) donne :

- d'une part une preuve analytique du théorème de FEUERBACH et ajoute en corollaire :
  Etant donné un triangle non isocèle, les axes radicaux du cercle d'EULER avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle et les trois côtés de ce triangle sont sept droites tangentes à l'ellipse (de centre G) qui est tangente à chaque côté du triangle en son milieu.
- d'autre part répond à la question posée par Jean KUNTZMANN (Grenoble) au bas de la page 494 du *Bulletin* N°370, en prouvant que : *le centre du cercle d'EULER se trouve sur une bissectrice intérieure d'un triangle non isocèle si et seulement si l'un de ses angles mesure 60°.*

ERRATUM

Bulletin N°375 , page 515, ligne 9 du bas :
remplacer $+ a_i$ par $< a_i$.