Ces problèmes qui font les mathématiques

La géométrie du compas

par Jacques Fort

Professeur honoraire
Faculté des sciences de Poitiers

L'utilisation du seul compas en géométrie plane conduit à des configurations intéressantes, des plus simples aux plus compliquées. La présente étude (*) propose quelques unes de ces situations et développe à cette occasion une démonstration par voie géométrique du résultat de MOHR-MASCHERONI : tout point constructible à la règle et au compas, est constructible avec le seul compas. Pour une étude algèbrique de ce résultat on pourra se reporter au très bon livre de J.C. CARREGA [3].

Dans son article "l'inutile règle", publié au *Bulletin* de l'APMEP [6], B. PARZYSZ propose une intéressante étude géométrique du théorème de MOHR-MASCHERONI, basée sur la construction -avec le seul compas- d'une quatrième proportionnelle, et sur des similitudes de triangles isocèles. Le point de vue adopté ici est différent : il consiste en l'utilisation assez systématique des réseaux de triangles équilatéraux, et de la configuration du problème de NAPOLEON-MASCHERONI : *construire avec le seul compas, le centre "effacé" d'un cercle donné.*

I Points constructibles avec le compas

(*) *Exposée le 22.11.89 à Saintes, à l'occasion de l'Assemblée Générale de la Régionale APMEP de Poitiers.*

Notations : $\mathcal{C}$ (A,d) désigne le cercle de centre A et de rayon d, $\mathcal{D}$ (U,V), pour U≠V, désigne la droite (non tracée !) contenant les deux points U et V.

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de points du plan affine euclidien, appelés "points de base", de cardinal au moins égal à 2.

$\mathcal{B}_1$ est l'ensemble constitué des points de $\mathcal{B}$ et des points d'intersection de tous les couples de cercles $\mathcal{C}$ (A,AB) et $\mathcal{C}$ (C,CD) associés aux divers choix dans $\mathcal{B}$, des points A, B, C, D, (A≠B et C≠D).

L'ensemble $\mathcal{B}_2$ est obtenu à partir de $\mathcal{B}_1$, selon le même processus de construction de $\mathcal{B}_1$ à partir de $\mathcal{B}$.

Par récurrence, on définit ainsi une suite croissante pour l'inclusion, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n, \ldots$, d'ensembles de points du plan. Leur réunion $C(\mathcal{B}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n$ est, par définition, l'ensemble des points du plan constructibles *avec le compas* (seul) *à partir de* $\mathcal{B}$.

Il est à remarquer que cette définition interdit le tracé de cercles $\mathcal{C}$ (A, BC) qui utilise le compas comme *transporteur de distance*, ici BC. Cette interdiction sera levée ultérieurement (cf. construction **9**).

Tout cercle $\mathcal{C}$(M,MN) avec M∈$\mathcal{B}$, N∈$\mathcal{B}$, M≠N, sera dit *cercle constructible* (avec le compas) à partir de $\mathcal{B}$.

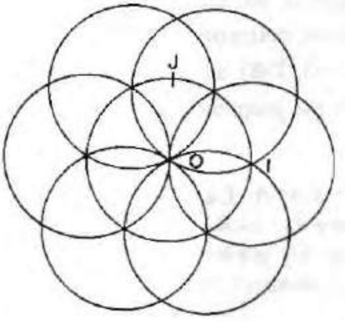
Exercice : Partant de $\mathcal{B}$ = {O,I}, construire avec le compas seul, $\mathcal{B}_1$ (4 points) et $\mathcal{B}_2$ (14 points).

II Réseau de triangles équilatéraux

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ le repère cartésien défini par les trois points O, I, J, $\left(\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}\right)$. Le réseau $\mathcal{R}$ des sommets M des triangles équilatéraux construits au compas à partir de OI comme côté, peut être défini à l'aide des vecteurs générateurs $\vec{i}$ et $\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}\right)$

comme ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = m\,\vec{i} + n\,\vec{u}$; $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$

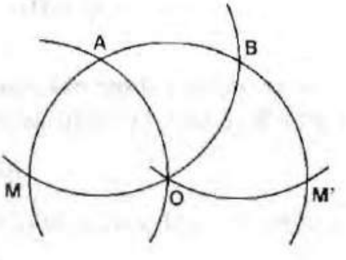
Tout point de $\mathcal{R}$ est évidemment constructible avec le compas à partir de $\mathcal{B} = \{O,I\}$ (figure 1). J n'est pas dans $\mathcal{R}$.



On peut extraire de ce réseau $\mathcal{R}$ les constructions élémentaires qui suivent, dont les justifications sont laissées aux soins du lecteur :

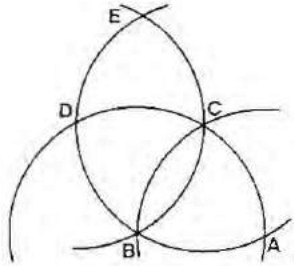
1) Soit deux points donnés O et M. ***Le symétrique M' de M par rapport à O est constructible avec le compas à partir de {O,M}.***

Construction (figure 2) : $\mathcal{C}$ (O, OM) et $\mathcal{C}$ (M, MO) se coupent en A. $\mathcal{C}$ (O, OM) et $\mathcal{C}$ (A, AO) se coupent en B. $\mathcal{C}$ (O, OM) et $\mathcal{C}$ (B, BO) se coupent en M'.

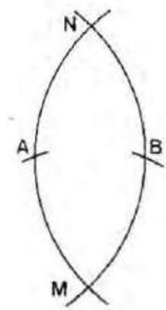


2) Soit deux points A et B. ***La perpendiculaire en B à la droite*** *𝔇(A, B), est obtenue par deux de ses points constructibles avec le compas à partir de {A, B}.*

Construction (figure 3) : $\mathcal{C}$ (B, BA) et $\mathcal{C}$ (A, AB) se coupent en C. $\mathcal{C}$ (B, BA) et $\mathcal{C}$ (C, CB) se coupent en D. $\mathcal{C}$ (C, CB) et $\mathcal{C}$ (D, DB) se coupent en E. 𝔇 (B, E) est perpendiculaire à 𝔇 (A, B).



3) Soit deux points A et B. ***La médiatrice du segment [AB]*** *est obtenue par deux de ses points constructibles avec le compas à partir de {A, B}* (figure 4)



Soit $\mathcal{R}_1$ l'ensemble constitué des points de $\mathcal{R}$, et des points d'intersection de tous les couples de cercles $\mathcal{C}$ (A, AB) et $\mathcal{C}$ (C, CD) associés aux divers choix dans $\mathcal{R}$, des points A, B, C, D, (A ≠ B et C ≠ D).

Pour qu'un nombre réel positif d soit égal à la distance de deux points du réseau $\mathcal{R}$, il faut et il suffit qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$d^2 = m^2 + mn + n^2$$

et, dans ces conditions, si M et N sont deux tels points, alors

$$\overrightarrow{MN} = m\,\vec{i} + n\,\vec{u}$$

Cela permet de décider si un point du plan appartient, ou non, à $\mathcal{R}_1$.

Premier exemple : le point K tel que $\overrightarrow{OK} = \sqrt{2}\ \vec{j}$.

A étant un point de $\mathcal{R}$, défini par $\overrightarrow{OA} = a\ \vec{i} + b\ \vec{u}$, on trouve aisément

$$AK^2 = a^2 + a\,b + b^2 - b\sqrt{6} + 2$$

Pour que K appartienne à $\mathcal{C}$ (A, AB), il faut et il suffit qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, tels que

$$a^2 + ab + b^2 - b\sqrt{6} + 2 = m^2 + mn + n^2\ ;$$

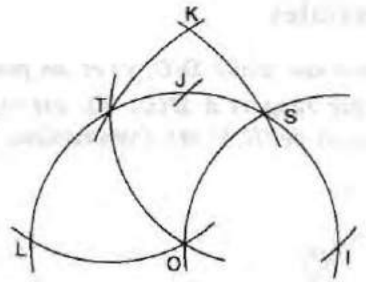
alors : $\quad b = 0 \quad$ et $\quad a^2 + 2 = m^2 + mn + n^2$.

Les deux choix simples (figure 5) :

$a = 1$, $m = -2$, $n = 1$, conduit au cercle $\mathcal{C}$ (I, IT);

$a = 1$, $m = 1$, $n = 1$, conduit au cercle $\mathcal{C}$ (I', I'S)

(ces deux cercles se coupent en K)



montrent que K est dans $\mathcal{R}_1$, et ainsi :

4) Etant donnés deux points O et I, le sommet K d'un triangle IOK, rectangle en O et tel que $OK = OI\sqrt{2}$, est constructible avec le compas à partir de {O, I}.

Par anticipation, admettons que le transport des distances avec le compas soit licite (cf. construction **9**), alors $\mathcal{C}$ (O, OI) et $\mathcal{C}$ (I, OK) se coupent au point J.

Ainsi :

5) Etant donnés deux points O et I, le somment J d'un triangle IOJ isocèle et rectangle en O, est constructible avec le compas à partir de {O, I}.

Notons que si OI = 1, alors les nombres $\sqrt{2}$ = OK et $\sqrt{3}$ = IK sont "constructibles" avec le compas.

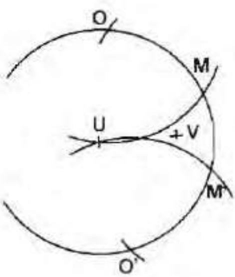
Deuxième exemple : le milieu C de [O I].

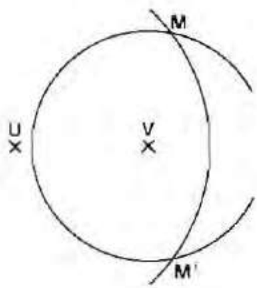
Comme précédemment, si $\overrightarrow{OA} = a\ \vec{i} + b\ \vec{u}$ $(a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z})$,
on trouve $4\ AC^2 = 4(a^2 + ab + b^2 - a) - 2b + 1$
et la relation $4(a^2 + ab + b^2 - a) - 2b + 1 = 4(m^2 + mn + n^2)$
est impossible à réaliser avec des entiers m et n (prendre les restes mod. 2).

Le point C n'est donc pas dans $\mathbb{R}_I$, ce qui signifie que sa construction avec le compas à partir de [O, I] n'est pas simple (voir plus loin **15**).

III Symétries axiales

6) *Etant donnés une droite* $\mathfrak{D}(U, V)$ *et un point M*, ***le symétrique M' de M par rapport à*** $\mathfrak{D}$***(U, V)****, est constructible avec le compas à partir de {U, V, M}*. Construction, voir la figure 6.





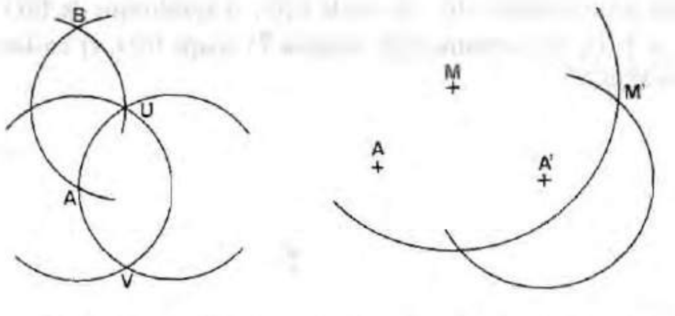
Exercice : Si M est voisin de la droite $\mathfrak{D}$(U, V) (figure 7), la précision du tracé peut être améliorée en utilisant un cercle auxiliaire passant par U et M, par exemple celui de centre O, $\mathcal{C}$(O, OU), tel que OU = OM = MU. On construit son symétrique $\mathcal{C}$(O', O'U) par rapport à $\mathfrak{D}$(U, V) (voir construction **7**). $\mathcal{C}$(O', O'U) et $\mathcal{C}$(U, UM) se coupent en M'.

7) Etant donnés un cercle $\mathcal{C}(S, SA)$ et une droite $\mathcal{D}(U, V)$, le symétrique du cercle $\mathcal{C}(S,SA)$ par rapport à la droite $\mathcal{D}(U, V)$ est constructible à partir de $\{S, A, U, V\}$.

Construction : prendre les symétriques S' et A' de S et A par rapport à $\mathcal{D}$(U, V). $\mathcal{C}$(S', S'A') est le cercle cherché.

8) Soit t une translation définie par deux points homologues A et $A' = t(A)$. Le transformé $M' = t(M)$ de tout point M est constructible avec le compas à partir de $\{A, A', M\}$.

On construit (figure 8) par deux de ses points la médiatrice $\mathcal{D}$(U, V) du segment AA' (construction **3**), et la perpendiculaire $\mathcal{D}$(A, B) en A à $\mathcal{D}$(A, A') (construction **2**). La translation t est alors la composée des symétries d'axes $\mathcal{D}$(A, B) et $\mathcal{D}$(U, V). M' s'obtient donc à partir de M par deux constructions successives de type **6** - non réalisées sur la figure 8 -.



On en déduit une conséquence importante qui permettra de simplifier toutes les constructions ultérieures (et aussi antérieures) :

9) Etant donnés trois points distincts A, B, C, le cercle $\mathcal{C}(A, BC)$ est constructible à partir de $\{A, B, C\}$.

En effet, d'après **8**, le point D, transformé de A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est constructible avec le compas à partir de {A, B, C}. Le cercle $\mathcal{C}$(A, AD) = $\mathcal{C}$(A, BC) est alors constructible.

Ce résultat autorise l'emploi du compas comme *transporteur de distance*, et permet d'éliminer le tracé des cercles constructibles mis en jeu dans la construction **8**. Cette construction se *réduit* alors à (figure 9) : $\mathcal{C}$(M, AA') et $\mathcal{C}$(A', AM) se coupent en M'.

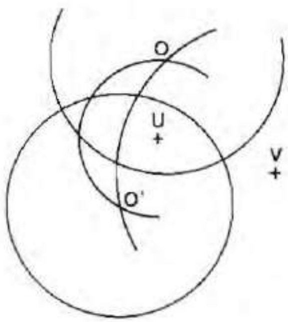
On simplifierait de même la construction **7**.

10) Soit r une rotation définie par son centre O, et par deux points homologues A et A' = (A), (OA = OA'). Le transformé M' = r(M) de tout point M est constructible avec le compas à partir de {O, A, A', M}.

Preuve : La médiatrice $\mathcal{D}$(O, U) du segment AA' est constructible. r est alors composée des deux symétries d'axes $\mathcal{D}$(O, A) et $\mathcal{D}$(O, U). M' est constructible au moyen de deux constructions de type **6**.

11)Etant donnés un cercle $\mathcal{C}$(O, r) et une droite $\mathcal{D}$(U, V) ***ne contenant pas le centre O****, les points d'intersection de $\mathcal{C}$(O, r) et de $\mathcal{D}$(U, V) sont constructibles avec le compas à partir de {O, U, V} et de la longueur r.*

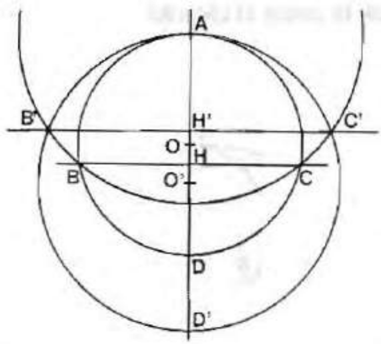
Construction (figure 10) : le cercle $\mathcal{C}$(O', r) symétrique de $\mathcal{C}$(O, r) par rapport à $\mathcal{D}$(U, V) (constructible d'après **7**) coupe $\mathcal{C}$(O, r) en les points cherchés M et N.



La construction avec le seul compas des points d'intersection d'un cercle $\mathcal{C}$(O,r) avec une droite contenant le centre O, n'est pas simple, et sera abordée plus loin (cf. construction **18**).

IV - La configuration du problème de NAPOLEON - MASCHERONI

Cette configuration est la suivante (figure 11) : deux cercles $\mathcal{C}(O, r)$ et $\mathcal{C}(O', r')$ sont tangents intérieurement en A. Un cercle $\mathcal{C}(A, p)$ les coupe en B, C et B', C', respectivement.



H et H' désignent les points d'intersection avec $\mathcal{D}(O, O')$ des droites $\mathcal{D}(B,C)$ et $\mathcal{D}(B',C')$.

D et D' sont les points diamétralement opposés à A sur $\mathcal{C}(O, r)$ et sur $\mathcal{C}(O', r')$. On pose AH = h, AH' = h'.

Dans les triangles rectangles ABD et AB'D' :

$$p^2 = AB^2 = \overline{AH}.\overline{AD} = 2\,r\,h$$

d'où (*) $\boxed{r\,h = \frac{p^2}{2} = r'h'}$

$$p^2 = AB'^2 = \overline{AH'}.\overline{AD'} = 2\,r'h'$$

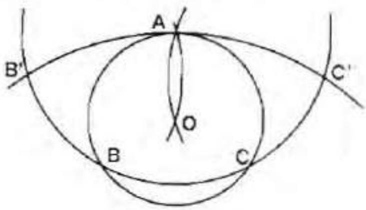
Première utilisation, construction de NAPOLEON

12) Soit $\mathcal{C}(O, r)$ un cercle donné, dont le centre O est effacé. Avec le compas et à partir des seuls points du cercle, construire ce centre.

L'analyse consiste en la suite d'équivalences :

(O est symétrique de A par rapport à $\mathfrak{D}$(B', C')) ⇔ (h' = $\frac{r}{2}$) ⇔ (h = $\frac{r'}{2}$) ⇔ (O' est symétrique de A par rapport à $\mathfrak{D}$(B, C)).

La construction et sa justification en résultent (figure 12) : choisir un point A sur $\mathfrak{C}$(O, r). Tracer un cercle $\mathfrak{C}$(A, p) qui coupe $\mathfrak{C}$(O, r) en B et C. Tracer le symétrique O' de A par rapport à $\mathfrak{D}$(B, C) (construction de type **6**). Le cercle $\mathfrak{C}$(O', O'A) coupe $\mathfrak{C}$(A, p) en B' et C'. Le symétrique de A par rapport à $\mathfrak{D}$(B', C') est le centre O cherché.



Remarque : ce processus résout également les constructions suivantes :

> *13)Soit un triangle isocèle ABC (AB = AC) donné par ses trois sommets.* ***Le centre du cercle circonscrit à ce triangle isocèle*** *est constructible avec le compas à partir de {A, B, C}.*

En effet (même figure 12) : tracer le symétrique O' de A par rapport à $\mathfrak{D}$(B, C) ; $\mathfrak{C}$(O', O'A) et $\mathfrak{C}$(A, AB) se coupent en B' et C' ; le centre cherché est le symétrique de A par rapport à $\mathfrak{D}$(B', C').

> *14) Soit ABC un triangle rectangle (en A) donné par ses trois sommets.* ***Le centre du cercle circonscrit à ce triangle rectangle*** *est constructible avec le compas à partir de {A, B, C}.*

Il suffit de remarquer, à cet effet, que ce centre coïncide avec le centre du cercle circonscrit au triangle isocèle ABA', où A' est le symétrique de A par rapport à $\mathfrak{D}$(B, C).

Deuxième utilisation, construction du milieu M d'un segment [AO] :

Considérons à nouveau la configuration de NAPOLEON - MASCHERONI (figure 11) et la suite d'équivalences :

(le milieu M de [OA] est symétrique de A par rapport à $\mathbb{D}$(B', C')

$\Leftrightarrow$ $(h' = \frac{r}{4})$ $\Leftrightarrow$ $(h = \frac{r'}{4})$

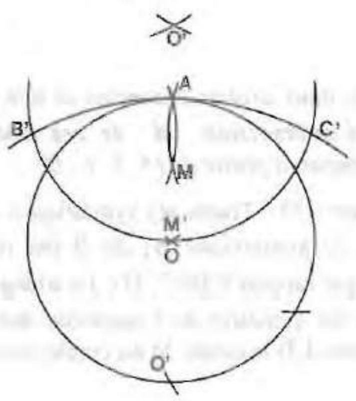
$\Leftrightarrow$ (le milieu M' de [O'A] est symétrique de A par rapport à $\mathbb{D}$(B, C)).

Dans ces conditions, (*) implique $p^2 = \frac{r\,r'}{2}$. Comme on peut aisément doubler les longueurs avec le compas (construction **1**), on choisit, pour simplifier $r' = 2\,r$ et $p = r$.

<u>Construction</u> (figure 13) : Tracer le symétrique O' de A par rapport à O(construction **1**). $\mathbb{C}$(A, AO) et $\mathbb{C}$(O',O'A) se coupent en B' et C'. Le symétrique M de A par rapport à $\mathbb{D}$(B', C') (construction **6**) est le milieu de [O A].

La justification repose sur le fait que, $\mathbb{C}$(A, AO) et $\mathbb{C}$(O, OA) ayant ici même rayon, le centre O et le milieu M' de [O'A] coïncident.

L'énoncé précis de ce résultat est :

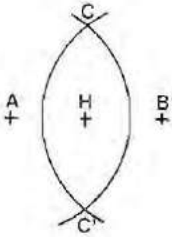


15) A et B étant deux points donnés, le milieu du segment AB est constructible avec le compas à partir de {A, B}.

Conséquences :

*16) Etant donnés trois points A, B, C, (A ≠ B), le **projeté orthogonal de C sur la droite** $\mathcal{D}$**(A, B)** est constructible avec le compas à partir de {A, B, C}.*

Construction (figure 14) : Tracer le symétrique C' de C par rapport à $\mathcal{D}$(A, B) (construction **6**), puis le milieu H du segment CC' (construction **15**).



*17) Etant données deux droites distinctes et non parallèles $\mathcal{D}$(A, B) et $\mathcal{D}$(C, D), le **point d'intersection M de ces deux droites** est constructible avec le compas, à partir de {A, B, C, D}.*

Construction (figure 15) : Tracer les symétriques C' et D' de C et D par rapport à $\mathcal{D}$(A, B), le symétrique B_1 de B par rapport à $\mathcal{D}$(C, D), le symétrique B'_1 de B par rapport à $\mathcal{D}$(C', D'). Le triangle B_1 B B'_1 est *isocèle* car $\mathcal{D}$(A, B) est axe de symétrie de l'ensemble des huit points du tracé. Construire alors (d'après **13**) le centre M du cercle circonscrit à ce triangle B_1 B B'_1.

Justification : $\mathfrak{D}$(C, D), $\mathfrak{D}$(A, B), $\mathfrak{D}$(C', D') sont les trois médiatrices du triangle B_1 B B'_1. M est bien le point commun à $\mathfrak{D}$(A, B) et $\mathfrak{D}$(C, D).

Cas d'exception : Si B_1 et B'_1 sont confondus, cette construction tombe en défaut. Dans ce cas $\mathfrak{D}$(A, B) et $\mathfrak{D}$(C, D) sont perpendiculaires et leur point commun M est le projeté orthogonal de C sur $\mathfrak{D}$(A, B), qui est constructible d'après **16**.

V Le théorème de MOHR - MASCHERONI

Rappelons que la constructibilité des points avec la règle et le compas se définit, comme au I, au moyen d'une suite croissante d'ensembles de points $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, ..., \mathfrak{B}_n, ...$, la génération de $\mathfrak{B}_1$ à partir de $\mathfrak{B}$ étant modifiée comme suit :

$\mathfrak{B}_1$ est l'ensemble des points de $\mathfrak{B}$ et de tous les points d'intersection :

a) des droites $\mathfrak{D}$(A, B) et $\mathfrak{D}$(C, D)

b) de la droite $\mathfrak{D}$(A, B) et du cercle $\mathfrak{C}$(C, CD)

c) des deux cercles $\mathfrak{C}$(A, AB) et $\mathfrak{C}$(C, CD)

pour tous les choix de points A, B, C, D, de $\mathfrak{B}$ tels que A≠B et C≠D

Présentement, nous sommes capables d'obtenir avec le seul compas,

- bien évidemment les points d'intersection de deux cercles $\mathcal{C}(A, AB)$ et $\mathcal{C}(C, CD)$.

- le point d'intersection de deux droites $\mathcal{D}(A, B)$ et $\mathcal{D}(C, D)$ (construction **17**).

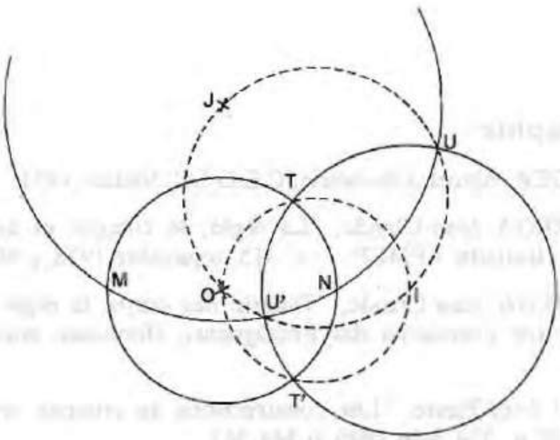
- les points d'intersection d'un cercle $\mathcal{C}(C, CD)$ avec une droite $\mathcal{D}(A, B)$ *qui ne contient pas le centre du cercle* (construction **11**).

Le théorème de MOHR - MASCHERONI sera donc établi si nous pouvons construire, avec le seul compas, l'intersection d'un cercle avec une droite passant par son centre (droite diamétrale). Ceci est équivalent au problème : Etant donnés deux points A et B, et une longueur r, construire avec le compas les deux points M de la droite $\mathcal{D}(A, B)$ tels que MA = r.

18) Etant donnés un cercle $\mathcal{C}(O, r)$ et un point I distinct de O, les points M et N d'intersection du cercle $\mathcal{C}(O,r)$ et de la droite $\mathcal{D}(O,I)$ sont constructibles avec le compas à partir des points {O, I} et de la longueur r.

Le problème n'est pas facile. La solution proposée ici ne vaut que par sa démonstration du résultat annoncé, et ne peut prétendre conduire à un processus graphique précis ou intéressant : elle exige le tracé d'au moins 26 cercles !

Le principe est le suivant (figure 16) : on peut tout d'abord supposer que I est à <u>l'extérieur</u> de $\mathcal{C}(O, r)$, en le remplaçant, si nécessaire, par un point I' tel que $\overrightarrow{OI'} = n\,\overrightarrow{OI}$ (n étant un entier suffisamment grand), point qui est constructible avec le compas à partir de {O, I} par itération de la construction **1** (ou **8**). Les points M et N à construire sont les points de base du faisceau de cercles $\mathcal{F}$ défini par le cercle $\mathcal{C}(O, r)$ et par l'axe radical $\mathcal{D}(O, I)$. Le cercle $\mathcal{C}(I, p)$ de centre I, orthogonal à $\mathcal{C}(O, r)$, appartient au faisceau $\mathcal{F}'$ à points limites M et N, conjugué de $\mathcal{F}$. Le point J tel que IOJ soit un triangle rectangle isocèle (OI = OJ) appartient à la droite des centres des cercles du faisceau $\mathcal{F}$. Le cercle $\mathcal{C}(J, r')$ de centre J, orthogonal à $\mathcal{C}(I, p)$, appartient au faisceau conjugué de $\mathcal{F}'$, c'est à dire à $\mathcal{F}$. Ce cercle $\mathcal{C}(J, r')$ contient les points de base M et N.



Construction (figure 16).

Tracer successivement :

- le cercle de diamètre [OI] (construction **15**) qui coupe $\mathcal{C}(O, r)$ en T et T'.
- le point J tel que IOJ soit un triangle rectangle (en O) et isocèle (construction **5**).
- le cercle de diamètre [IJ] (construction **15**) qui coupe $\mathcal{C}(I, IT)$ en U et U'.
- le cercle $\mathcal{C}(J, JU)$ qui coupe $\mathcal{C}(O, r)$ en les points cherchés M et N.

La justification résulte de l'analyse préalable. Elle peut cependant être donnée de manière *élémentaire*, sans utiliser la théorie des faisceaux de cercles :

JUI est un triangle rectangle : $JU^2 = IJ^2 - IU^2$

ITC est un triangle rectangle : $IT^2 = OI^2 - OT^2 = OI^2 - OM^2$.

Ainsi,

$$JM^2 = JU^2 = IJ^2 - (OI^2 - OM^2)$$
$$= (IJ^2 - OI^2) + OM^2 = OJ^2 + OM^2.$$

Le triangle JOM est rectangle en O ; de même pour JON. [MN] est un diamètre de $\mathcal{C}(O, r)$.

Bibliographie :

[1] - BERGER Marcel, Géométrie, C.E.D.I.C. Nathan 1971.

[2] - CARREGA Jean-Claude, "La règle, le compas et la théorie des corps", Bulletin APMEP n° 315, septembre 1978, p 601-629.

[3] - CARREGA Jean-Claude, "Théorie des corps, la règle et compas", Collection Formation des Enseignants, Hermann, nouvelle édition 1989.

[4] - CLOU Jean-Pierre, "Les constructions au compas seul", Bulletin APMEP n° 374, juin 1990, p 344-347.

[5] - MASCHERONI Lorenzo, "Géométrie du compas", Bachelier, Paris, 1928

[6] - PARZYSZ Bernard, "L'inutile règle", Bulletin APMEP n° 330, septembre 1981, p 633-642.

[7] - STEWART Ian, Galois theory, Chapman and Hall, London 1978.