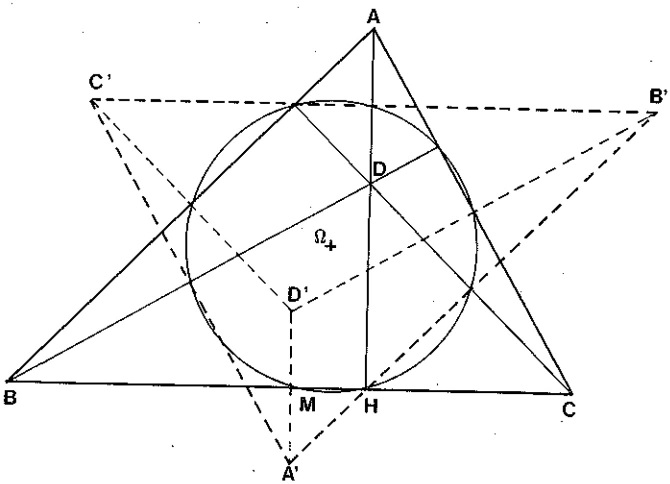
Echange

Le Cercle des 44 points

J.Kuntzmann
Grenoble

On l'appelle habituellement le cercle des 9 points, mais il en contient bien d'autres, comme nous allons le voir.



1) Soit ABC un triangle qui n'est ni rectangle, ni isocèle et D son orthocentre (*Fig 1*) . En réalité, chacun des quatre points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. On a ainsi quatre triangles qui ont le même cercle des 9 points. Les "neuf points" sont les mêmes pour les quatre triangles : trois sont les pieds des hauteurs, les six autres sont, avec des interprétations différentes, milieu de côté ou milieu de segment orthocentre-sommet.

Et de douze !

2) Les centres des cercles circonscrits à ces quatre triangles forment une nouvelle figure A'B'C'D' symétrique de la premère par rapport au centre Ω du cercle des neuf points. Cette nouvelle figure possède le même cercle des neuf points que la précédente. Ceci n'introduit sur le dit cercle que trois nouveaux points, pieds des hauteurs de A'B'C'D'. Nous voila en possession de douze points.

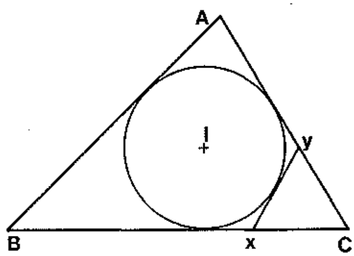
12 + 32 = 44

3) Mais on sait que le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit (Cf Annexe 1) et aux cercles exinscrits (Cf Annexe 2). Nous avons en tous huit triangles à partir des deux quadruplets ABCD et A'B'C'D'. Chaque triangle possède quatre cercles (inscrits et exinscrits) tous tangents au cercle des neuf points commun. Cela nous fait 32 cercles avec 32 points de contact. Avec les 12 points précédents, cela nous fait 44 points.

ANNEXE 1

Voici une démonstration simple du fait que le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit.

Soient x et y les abscisses sur CA et CB des intersections avec une tangente au cercle inscrit. On a entre x et y la relation homographique symétrique:



$$(a+b+c)xy = 2ab(x+y) + ab(c-a-b)$$

Cette relation doit être vérifiée pour $x = 0$, $y = \dfrac{a+b+c}{2}$ et $x = a$, $y = b$

Cherchons par ailleurs le point où l'axe radical des deux cercles coupe BC. On trouve $x_1 = \dfrac{a(a-c)}{2a-b-c}$. La tangente au cercle inscrit issue de ce point recoupe AC en $y_1 = \dfrac{b(b-c)}{2b-a-c}$. Ce résultat diffère du précédent par l'échange de a et b. Il en résulte que ce point est aussi sur l'axe radical. Les deux cercles sont tangents puisque l'axe radical est tangent à l'un d'eux.

ANNEXE 2 (*Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent aux cercles exinscrits*)

Un calcul très voisin de celui de l'annexe 1 le montrerait. On peut aussi le montrer de la manière suivante :

Soit K le pied de la bissectrice de $\widehat{A}$. Une inversion de centre K et de puissance KJ×KJ' échange cercle inscrit et exinscrit. Il suffit de montrer qu'elle conserve le cercle des neuf points, c'est-à-dire que KJ×KJ' = KH×KM.

Pour éviter un calcul fastidieux, remontons tous les points sur la bissectrice. Il faut montrer que :
KI×KI' = KA×KN (N milieu de l'arc BC du cercle circonscrit). Or, les deux sont égaux à KB×KC car le cercle de diamètre II' passe manifestement par B et C.