Bulletin de l'APMEP n° 375 - septembre 1990

Calcul - Lecture

Michel Bacquias
Ste Ménéhould

Nous sortons d'une période historiquement datée, celle du calcul écrit, celle de la victoire des algorithmistes sur les abacistes, mais nous hésitons encore à en tirer les conséquences. En particulier, nous n'analysons pas les raisons qui nous font débuter l'apprentissage du nombre par les naturels.

Pour ma part, j'essaie de montrer que ces raisons étaient liées à la technique de calcul nécessitant l'utilisation de l'écriture décimale à partir de l'unité simple. L'usage abusif de la théorie des ensembles a, de plus, rendu habituel le sophisme faisant de l'entier naturel un nombre "concret".

N'est-il pas temps de rendre au nombre sa vraie signification, celle de la mesure : *"Le nombre, langage de la mesure"* pour paraphraser le très beau titre de Tobias DANTZIG.

Rien n'empêche à mon sens de partir, dès l'école primaire, de ce nombre-mesure que je trouve bien réel, en tout cas aussi réel pour l'enfant que l'entier lui est devenu naturel. Cela suppose simplement que nous mettions un peu d'ordre dans nos idées et, par là, dans notre vocabulaire.

*

Il va falloir convenir enfin que le nombre est inséparable du choix de l'unité et qu'il est **fondamental** d'apprendre à connaître et reconnaître ces unités. Quelle belle source d'activité pour l'enfant que la recherche et l'usage des unités anciennes, ces pouces, palmes, pieds, coudées ou brasses. A l'inverse, il faudra lui faire rechercher les unités de mesure que sa famille, son entourage utilise et convenir avec lui de repères physiques, gestuels, corporels permettant leur appropriation. Il faut que ces unités s'inscrivent dans son corps comme ces nombres qu'il sait montrer avec ses doigts. Il faudra, bien sûr, discuter, montrer la dizaine, imaginer la centaine, le millier aussi bien que le kilogramme et "les tonnes du gros camion". Doit-il connaître la signification exacte du kilomètre, pour en parler, s'en donner une représentation familière et pour chercher à évaluer la longueur et aussi la durée d'une promenade ?

Cela va retarder l'apprentissage de l'écriture décimale de position et les algorithmes de calcul, mais n'est-il pas dangereux justement de donner à l'enfant du Cours Préparatoire une écriture particulière pour le nombre ? En même temps qu'il apprend à lire et à écrire, au moment ou les mots **écrits** prennent sans doute pour lui et peut-être définitivement toute leur force, ne faut-il pas lui faire **écrire** que 2 kilomètres + 3 kilomètres = 5 kilomètres ou que 2 dizaines + 3 dizaines = 5 dizaines ?

Le nombre nait de la mesure et la mesure elle-même de l'unité choisie. Les possibilités de comptabilité limitées de cet âge obligent justement l'enfant à choisir soigneusement **l'ordre de grandeur de l'unité**, ce qui est primordial.

En résumé, est-ce le calcul qui précède la mesure ou la mesure qui commande le calcul ? Comment s'étonner que 17 poules + 28 chèvres mesurent l'âge du capitaine alors qu'on a créé le réflexe du calcul plutôt que le goût de la mesure ?

Cette recherche constante du nombre à travers la mesure amène très vite à la nécessité du fractionnement. Il faudra réhabiliter des notations comme $5^1/_4$ et $3^1/_2$ qui sont d'un grand intérêt pédagogique et qui ressurgissent de toute façon, par le biais de l'univers informatique. Il faudra que la "partie décimale" devienne, à l'anglo-saxonne, la partie fractionnaire, ce qui est bien plus clair, et que nous n'hésitions pas à appeler la notation 0,36 une fraction décimale.

Il faudra remettre en cause cette habitude, à mon avis très préjudiciable, de faire dépendre les unités d'aire et de volume de la longueur. Le m^2 n'est pas "1m par 1m" comme on le dit trop souvent; il est d'abord un carré. Quelle source d'activités là encore que la juxtaposition de formes permettant le "pavage" ou le "carrelage" d'une étendue. Notre époque de communication n'est pas avare d'emballages et l'enfant adore les colis. Combien de décimètres cubes dans le "gros" mètre cube ? La réponse est claire : **beaucoup** !

On devra insister sur la lecture des unités par classes, mais ce souci apparaît déjà dans les programmes récents. Il faudra nous demander si les signes "+ , - , x , :" sont encore des signes d'opérations pour l'écrit, ou plutôt s'ils ne doivent pas devenir *opératoires à la lecture pour l'ordre de grandeur*. Si l'on préfère, n'est-il pas temps de débarasser l'élève du réflexe du "ça-fait ?" à l'écrit, pour lui donner l'habiture de lire que : "18 342 + 1 923" *c'est* environ 20 milliers. N'est-ce pas le signe fonctionnel → qui doit devenir opératoire ? Mais là encore, cette évolution est déjà perceptible.

A ce prix, l'addition et la multiplication reprennent elles aussi leur vraie place. Elles permettent "d'accélérer" le comptage mais avec une présence renouvelée de l'unité et de l'ordre de grandeur. Dans cette hypothèse, l'écrit n'est plus opératoire mais méthodologique (39 + 7 = 40 + 6) et prépare les formalisations ultérieures.

QUELQUES APERÇUS (*) :

Le nombre et l'à peu près :

Il n'y a que deux domaines où l'enfant et le mathématicien peuvent se rencontrer. L'un est l'espace qu'ils ont exploré tous deux, chacun à sa manière et l'autre la langue maternelle où se sont accumulées les traces des concepts et des structures que traque le mathématicien. Apprenez à un enfant à se **carrer** sur ses jambes ou sur sa chaise. Convenez avec lui que ce geste lui donne une **base** ou une assise plus solide. Pensez-vous que vous aurez ensuite beaucoup de difficultés pour parler avec lui des proportions qui existent entre la base et la hauteur et pour répertorier ensuite différentes formes plus ou moins "trapues" ?

Pourquoi ne pas le faire ou ne pas l'avoir fait ? C'est parce qu'ensuite, il va falloir évaluer ces proportions, ce qu'on n'ose pas faire tant que l'enfant ne dispose pas d'une bonne pratique du calcul. On apprendra donc à calculer de droite à gauche et il faudra attendre dix ans et le programme de physique de seconde pour apprendre qu'une telle précision dans le calcul est souvent

(*) Le texte de cet article est extrait d'une brochure disponible chez l'auteur : Michel BACQUIAS. 61 rue Camille Margaine-51 800 Ste Ménéhould.

illusoire. On commencera par additionner pour pouvoir ensuite soustraire, multiplier et enfin diviser. Au bout d'un tel apprentissage, il conviendra de se demander si l'enfant a encore le "sens" des opérations qu'il sait "faire".

Ce qu'il y a de nouveau c'est qu'à notre époque, la machine à calculer coûte moins cher que le cahier où l'on "pose" les opérations. On vient même d 'admettre dans les programmes officiels de mathématiques le signe ≈ de "l'à peu près". Il est temps d'inciter et d'habituer les enfants à évaluer "à peu près", "en gros", "à vue de nez" les mesures et les proportions de ce qui les entoure.

De même, il faut que devant 18 342 + 2 439 l'enfant n'ait plus à se demander avec plus ou moins d'impatience ou de crainte combien "ça fait", mais *qu'en le lisant*, il sache que *c'est* à peu près 20 milliers et même un peu plus.

Or il est possible d'apprendre *à tous les enfants* une autre technique de calcul, "par la gauche", c'est-à-dire par la lecture ou en commençant, dans le sens de la lecture justement, par les unités qui donnent *l'ordre de grandeur de ce nombre.*

De même il est possible d'apprendre à chaque enfant à être conscient *de l'ordre de grandeur des longueurs, aires, volumes et écarts angulaires* des objets qui l'entourent ou dont il a connaissance.

DESCRIPTION DES PROCÉDURES

Rappelons qu'il ne s'agit pas de donner une méthode de calcul qui remplace toutes les autres, mais de mettre en valeur une procédure qui favorise la saisie de l'ordre de grandeur. Tous les élèves ne peuvent calculer mentalement 28 342 + 1 589, mais tous doivent être en mesure de prendre rapidement conscience de l'ordre de grandeur de cette somme.

- La première étape est celle de la lecture. Pour un nombre, cette lecture se fait habituellement de gauche à droite, encore que la présence d'un grand nombre d'unités amène parfois une recherche plus consciente. Pour une somme, il faudra choisir comme premier terme le plus grand nombre. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus (28 342 + 1 598) comme dans la somme 1 589 + 28 342, la première lecture importante est 28 000 ;

- La seconde étape est celle d'une recherche ordonnée des unités. La somme 20 805 + 7 090 ne nécessite aucun calcul, mais une bonne agilité dans la lecture.

Enfin, si l'on sait que 2 + 3 = 5, on connaît aussi :
2 cents + 3 cents = 5 cents
2 mille + 3 mille = 5 mille,
vingt + trente est moins facile et demande un apprentissage, mais les dizaines sont d'un usage si courant que la visualisation est immédiate et la mémorisation rapide.

On utilise donc des opérations portant sur un seul chiffre mais en accompagnant chaque chiffre par la lecture de son unité.

Les exemples ci-dessous doivent être compris comme "parlés" par quelqu'un lisant les unités de gauche à droite, les points figurant les temps de calcul de chaque unité ou de reprise de la lecture.

Exemples :

1 532 + 3
1 532 ....1 535

17 427 + 30
17 420 ....17 450 ....17 457

12 837 + 3 000
12 000 ....15 000 ....15 837

Il faut ensuite assimiler le passage à l'unité d'ordre supérieur qui se fait par complément à 10, 100 ou 1 000.

$$\begin{array}{rcl}
8 + 5 & = & (8 + 2) + 3 \\
80 + 50 & = & (80 + 20) + 30 \\
800 + 500 & = & (800 + 200) + 300
\end{array}$$

Cela suppose une connaissance parfaite de ces compléments et un entraînement au mécanisme de leur "déclenchement".

Exemples :

1 528 + 5
1 528 ....1 530 ....1 533
(mémorisation de 2) (complément à 5)

35 387 + 50
35 380 ....35 400 ....35 430 ... 35 437
(mémorisation de 20) (complément à 50)

843 + 500

800 ....1 000 ....1 300 ....1 343

(mémorisation de 200) (complément à 500)

Donnons enfin des exemples d'emploi de ce procédé sur des additions à plusieurs chiffres et sur les autres opérations, mais après avoir rappelé que l'important pour tous les élèves n'est pas de savoir conclure de tels calculs mais d'avoir le réflexe de lecture correspondant aux premières étapes de tels processus.

Exemples **:**

Addition :

1 426 + 243

1 000 ... 600 ... 1 600 ... 60 ... 1 660 ... 9 ... 1 669

1 426 + 293

1 000 .. 600 .. 1 600 .. 1 620 .. 1 700 .. 1 710 .. 9 .. 1 719

1 426 + 743

1 000 .. 1 400 .. 2 000 .. 2 100 .. 60 .. 2 160 .. 9 .. 2 169

1 426 + 796

1 000 .. 1 400 .. 2 000 .. 2 100 .. 2 120 .. 2 200 .. 2 210 ..
2216 .. 2 220 .. 2 222.

15 837 + 2 081

15 000 .. 17 000 .. 17 800 .. 17 830 .. 17 900 .. 17 910 .. 8 ..
17 918

Soustraction :

1 479 - 253

1 000 .. 200 .. 1 200 .. 20 .. 1 220 .. 6 .. 1 226

1 439 - 253

1 000 .. 200 .. 1 200 .. 1 100 .. 80 .. 1 180 .. 6 .. 1 186

1 436 - 758

1 000 .. 700 .. 600 .. 80 .. 680 .. 670 .. 8 .. 678

Multiplication :

2 436 x 7

14 000 .. 2 800 .. 16 800 .. 210 .. 17 010 .. 42 .. 17 052

Division :

4 529 : 7

4 200 .. 600 .. 329 .. 280 .. 40 .. 640 .. 49 .. 7 .. 647

On remarque que :

◊ La procédure est, sur le plan mental, simple et efficace pour des additions, même à plusieurs chiffres

◊ elle est plus ardue pour les soustractions comportant des reports ;

◊ les multiplications avec un multiplicateur à un chiffre ne posent pas de problème. Elles demandent la connaissance de la table et son adaptation aux différentes unités

◊ la division est d'une mémorisation plus difficile puisqu'elle comporte deux niveaux de calcul conjoints.

Par ce procédé, l'addition puis la multiplication reprennent leur place véritable, celle d'une technique rapide de comptage.

Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler qu'il ne s'agit pas de faire du véritable calcul "mental" et qu'il n'y a aucune raison de se priver du support de l'écrit, ce qui donne :

Soustraction : 1 479 - 253 = 747 + 479 = 1 226
1 436 - 758 = 242 + 436 = 678

La soustraction se fait par complémentation.

Multiplication : 47 x 23 = 800 + 120 + 140 + 21 = 1 081

Division par 7 : 17 206 = 14 000 + 3 206
= 14 000 + 2 800 + 406
= 14 000 + 2 800 + 350 + 56
= 7 x (2 000 + 400 + 50 + 8) = 7 x 2 458

L'autre avantage de cette procédure écrite est qu'elle illustre et prépare les mécanismes qui seront plus tard ceux du calcul algébrique.

Enfin, n'oublions pas qu'il s'agit d'un apprentissage progressif sur les cinq classes du premier degré et qui peut et doit s'appuyer sur un outil particulièrement puissant pour ce type de travail : l'ordinateur. Ce projet serait peut-être trop ambitieux sans le concours de l'informatique mais il semble que l'ordinateur soit particulièrement bien adapté à l'apprentissage des mécanismes mentaux.