

**Examens et concours**

# C.A.P.E.S. interne

## Session de 1990

### Première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

*L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche - éventuellement programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.*

*Matériel à fournir : feuilles de papier quadrillé 5x5 ;  
feuilles de papier millimétré.*

L'objectif du problème est la détermination d'approximations rationnelles de nombres réels, en particulier  $e$ , au moyen de développements en fractions continues.

Les trois premières parties sont largement indépendantes. La partie I propose la construction d'une suite de nombres rationnels convergeant vers  $\sqrt{2}$ , la partie II celle d'une suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction tangente hyperbolique. La partie III introduit la notion de développement en fraction continue et la partie IV propose la recherche de tels développements en utilisant les résultats des parties précédentes.

Dans ce problème, on note  $(a_n)$ ,  $(u_n)$ ,  $(u_{2n})$  etc, des suites de nombres réels indexées par  $n$  où  $n$  décrit l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ .

On peut utiliser, sans en faire la démonstration, le résultat suivant : on détermine une suite  $(x_n)$  de nombres réels et une seule par la donnée de ses deux premiers termes  $x_0$  et  $x_1$  et de la relation de récurrence :  $\forall n \geq 2, x_n = \alpha_n x_{n-1} + x_{n-2}$  où  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  est une suite donnée de nombres réels.

## I. APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$ PAR UNE SUITE DE NOMBRES RATIONNELS

### A. Construction d'une suite de nombres réels convergeant vers $\sqrt{2} - 1$

1. Vérifier que  $\sqrt{2} - 1$  est solution de l'équation  $x = \frac{1}{2+x}$ .
2. Représenter graphiquement (repère orthonormal, unité 10 cm) la fonction  $f$  définie sur le segment  $[0,1]$  par  $f(x) = \frac{1}{2+x}$ .
3. Vérifier qu'on définit une suite  $(u_n)$  de réels appartenant au segment  $[0,1]$  par  $u_0 = 0$  et la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$ .

En utilisant le graphique précédent, marquer sur l'axe des abscisses, les points d'abscisses respectives  $u_0, u_1, u_2, u_3$ .

4. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left| u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1) \right| = \frac{1}{(1 + \sqrt{2})(2 + u_n)} \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right|$$

En déduire que  $\forall n \in \mathbf{N}, \left| u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1) \right| \leq \frac{1}{4} \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right|$ , puis

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left| u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1) \right| \leq \frac{1}{4^n}.$$

Conclure.

### B. Propriétés de la suite $(u_n)$ .

1. Vérifier que  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n$  est un nombre rationnel.
2. Calculer  $u_n$  pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 de  $n$ .

3. Montrer que la suite  $(u_{2n})$  est croissante et que la suite  $(u_{2n+1})$  est décroissante,  
 On pourra s'appuyer, pour démontrer ces propriétés, sur le sens de variation de  $f$ .
4. Dédire des résultats précédents un encadrement d'amplitude inférieure à  $10^{-3}$  de  $\sqrt{2} - 1$  par des nombres rationnels, puis une valeur décimale approchée  $\sqrt{2}$  à  $10^{-3}$  près.
5. On pose pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{p_n}{q_n}$  où  $p_n$  et  $q_n$  sont des entiers naturels premiers entre eux et, pour  $n = 0$ ,  $p_0 = 0$ ,  $q_0 = 1$ .
- Déterminer  $p_1, q_1, p_2, q_2$ .
  - Montrer que, si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même de  $b$  et  $a + 2b$ .
  - En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_{n+1} = q_n$   
 $q_{n+1} = 2q_n + p_n$

## II. APPROXIMATION DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE PAR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES

On rappelle que pour tout réel  $x$ ,

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ . Dans cette partie, on désigne par la même notation un polynôme et la fonction polynôme associée.

### A. Etude d'une suite de fonctions.

- Vérifier qu'on définit une suite de fonctions  $(f_n)$  continues sur  $\mathbb{R}$ , par :  
 $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = \operatorname{sh} x$  et la relation de récurrence :  
 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x -2t f_n(t) dt$
- Expliciter les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ .
- Montrer que la suite  $(f_n)$  vérifie la relation :  
 $\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = 2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4x^2 f_{n-2}(x)$ .  
 On pourra, par exemple, caractériser  $f_n$  par l'expression de sa dérivée  $f'_n$  et la valeur  $f_n(0)$ .

4. a. Montrer que si P et Q sont deux polynômes tels que :  
 $\forall x \in \mathbf{R}, Q(x) \operatorname{sh} x - P(x) \operatorname{ch} x = 0$ , alors les polynômes P et Q sont nuls.  
 On pourra étudier le comportement de  $Q(x) \operatorname{sh} x - P(x) \operatorname{ch} x$  quand x tend vers  $+\infty$ .
- b. Montrer l'existence et l'unicité de deux suites de polynômes  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  tels que :  $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, f_n(x) = Q(x) \operatorname{sh} x - P(x) \operatorname{ch} x$
- c. Déterminer  $P_0, Q_0, P_1, Q_1$  et montrer que :  

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbf{R}, P_n(x) = 2(2n-1)P_{n-1}(x) + 4x^2P_{n-2}(x)$$

$$Q_n(x) = 2(2n-1)Q_{n-1}(x) + 4x^2Q_{n-2}(x).$$
- d. Montrer que les coefficients des polynômes  $P_n$  et  $Q_n$  sont des entiers naturels, que les polynômes  $P_n$  sont impairs et les polynômes  $Q_n$  pairs.
- e. Montrer que  $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, Q_n(x) \geq Q_n(0)$  et que  

$$Q_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}$$

**B. Suite de fonctions rationnelles convergent vers la fonction tangente hyperbolique.**

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}_+, |f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{n!} \operatorname{sh} x$
2. En déduire que  $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}_+$ ,  

$$\left| \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{x^{2n}}{n!} \times \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \times \frac{1}{Q_n(x)},$$
 puis que  $\left| \operatorname{th} x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{x^{2n}}{n!}$
3. Montrer que, pour tout réel x, la suite  $\left( \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right)$  converge vers  $\operatorname{th} x$  et que la convergence est uniforme sur tout segment de  $\mathbf{R}$ .

**III. DÉVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES**

Dans la suite du problème, pour tout réel x, on note E(x) sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Soit  $\alpha$  un réel positif, il s'écrit  $\alpha = E(\alpha) + \omega$  où  $\omega$  appartient à l'intervalle  $]0,1[$ . On pose  $a_0 = E(\alpha)$ .

Si  $\omega$  est non nul, on peut écrire  $\frac{1}{\omega} = E\left(\frac{1}{\omega}\right) + \omega_1$  et on a :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \omega_1} \text{ en posant } a_1 = E\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

Si  $\omega_1 = 0$ ,  $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1}$  est rationnel.

Si  $\omega_1$  est non nul, on peut poursuivre le processus et poser  $\frac{1}{\omega_1} = E\left(\frac{1}{\omega_1}\right) + \omega_2$ . On a donc :  $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \omega_2}}$  en posant

$$a_2 = E\left(\frac{1}{\omega_1}\right).$$

On constate que  $\omega_1 = \frac{1}{\omega} - E\left(\frac{1}{\omega}\right)$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1} - E\left(\frac{1}{\omega_1}\right)$ , ce qui suggère l'introduction de l'application  $T$  définie sur l'intervalle  $]0,1[$  par  $T(0) = 0$  et  $\forall x \in ]0,1[, T(x) = \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)$ .

*Exemple :*

Calculer  $T(\sqrt{2} - 1)$

Pour  $\alpha = \sqrt{2}$ , déterminer  $a_0, a_1, a_2$  et  $\omega_2$ .

### A. Suite d'entiers associée à un nombre irrationnel positif.

1. Montrer que  $\forall x \in ]0,1[, T(x) \in ]0,1[$  et que

$$\forall x \in ]0,1[, E\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1.$$

On définit  $T^0 = \text{id}$  où  $\text{id}$  désigne l'application identique de l'intervalle  $]0,1[$  dans lui-même puis, par récurrence, pour tout entier naturel  $n$ ,  $T^{n+1} = T \circ T^n$ .

2. Soit  $\omega$  un réel strictement compris entre 0 et 1.

On se propose de démontrer que  $\omega$  est rationnel si et seulement si  $T^n(\omega)$  est nul à partir d'un certain rang.

a. Montrer que  $T(\omega)$  est rationnel si et seulement si  $\omega$  est rationnel.

En déduire que, si  $\omega$  est irrationnel, pour tout entier naturel  $n$ ,  $T^n(\omega)$  est différent de 0.

b. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers tels que  $0 < p < q$ . Montrer que

$$T\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{r}{p} \text{ où } r \text{ est le reste de la division euclidienne de } q \text{ par } p.$$

En déduire de, si  $\omega$  est rationnel, il existe un entier  $n_0 \geq 1$  tel que

$$T^{n_0+1}(\omega) \text{ soit non nul et que, pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } n_0, T^n(\omega) = 0.$$

3.  $\alpha$  étant un nombre irrationnel positif, on considère  $\omega = \alpha - E(\alpha)$ .

Vérifier qu'on définit une suite d'entiers naturels  $(a_n)$ , strictement positifs sauf, peut-être en  $a_0$ , en posant :

$$a_0 = E(\alpha), \text{ et } \forall n \geq 1, a_n = E\left(\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right).$$

## B. Développement en fraction continue.

En se plaçant dans l'hypothèse et avec les notations du A.3., on considère la suite de fonctions  $(\varphi_n)$ , définie sur  $\mathbf{R}_+$  par  $\varphi_0(x) = a_0 + x$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \varphi_{n+1}(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{a_{n+1} + x}\right)$$

Enfin, on pose  $\forall n \in \mathbf{N}, r_n = \varphi_n(0)$ , associant ainsi au réel  $\alpha$  une nouvelle suite numérique, la suite  $(r_n)$ .

On a donc  $r_0 = a_0, r_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, r_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$  etc ...

Remarquant que  $r_n$  ne dépend que de la suite finie  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ , on note  $r_1 = [a_0, a_1], r_2 = [a_0, a_1, a_2], r_n = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ .

L'objectif de cette partie est de démontrer la convergence de la suite  $(r_n)$  vers  $\alpha$ .

.1. Convergence des suites  $(r_{2n})$  et  $(r_{2n+1})$ .

a. Montrer que  $\forall n \in \mathbf{N}, \alpha = \varphi_n(T^n(\omega))$ .

b. Montrer que les fonctions  $\varphi_n$  sont strictement monotones, décroissantes si  $n$  est impair, croissantes si  $n$  est pair.

c. Déduire des questions précédentes que  $\forall n \in \mathbf{N}, r_{2n} < \alpha < r_{2n+1}$ .

d. Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}, r_{2n+2} - r_n = \varphi_n \left( \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}} \right) - \varphi_n(0)$ .

En déduire que la suite  $r_{2n}$  est croissante et la suite  $r_{2n+1}$  décroissante.

e. Montrer que chacune des suites  $(r_{2n})$  et  $(r_{2n+1})$  est convergente.

2. Expression de  $r_n$  sous forme de fraction irréductible.

a. Montrer que  $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi_n(x) = \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}$  où  $(p_n)$  et

$(q_n)$  sont deux suites d'entiers naturels définies par  $p_0 = a_0, p_1 = 1 + a_0 a_1, q_0 = 1, q_1 = a_1$  et  $\forall n \geq 2, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = a_n p_{n-1} + q_{n-2}$

En déduire que  $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ .

b. Propriétés des suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$ .

Montrer que i. Les suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  sont croissantes.

ii.  $\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+2} \geq 2q_n$

iii.  $\forall n \in \mathbb{N}, p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^{n+1}$ .

iiii.  $\forall n \geq 1, p_n$  et  $q_n$  sont premiers entre eux.

3. Convergence de la suite  $(r_n)$ .

a. En remarquant que,  $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ ,

montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ .

b. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$  et  $\left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2^n}$

En déduire que la suite  $(r_n)$  converge vers  $\alpha$ .

◇ On dit qu'on a effectué le développement en fraction continue de  $\alpha$  et on écrit :

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$$

$r_n$  est nommé développement en fraction continue d'ordre  $n$  de  $\alpha$ .

c. En remarquant que  $\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right|$ ,

montrer que  $\left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| < \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha \right|$ .

d. i. Soient  $a, b, c, d, p, q$  six nombres entiers naturels tels que

$$bc - ad = 1 \text{ et } \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}.$$

Montrer que  $p > a, p > q, q > d$ .

ii. En déduire que, si le nombre rationnel positif  $\frac{p}{q}$  est une meilleure

approximation de  $\alpha$  que  $\frac{p_n}{q_n}$ , alors  $p > p_n$  et  $q > q_n$ .

4. Exemple : développement en fraction continue de  $\sqrt{2}$ . Les notations sont celles de la partie I.

a. Vérifier que les suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  introduites au I sont caractérisées par:

$$p_0 = 0, p_1 = 1, q_0 = 1, q_1 = 2$$

$$\text{et } \forall n \geq 2, p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}.$$

b. En utilisant le calcul de  $T(\sqrt{2} - 1)$ , donner le développement en fraction continue de  $\sqrt{2}$ .

5. Cas d'un nombre rationnel.

Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que  $\alpha$  est un nombre rationnel, strictement positif, non entier.

On pose à nouveau  $a_0 = E(\alpha)$  et  $\omega = \alpha - E(\alpha)$ . On sait (III.A.2.) qu'il existe un entier  $n_0 \geq 1$  tel que  $T^{n_0-1}(\omega) \neq 0$  et  $\forall n \geq n_0, T^n(\omega) = 0$ .

On pose, pour  $1 \leq n \leq n_0$ ,  $a_n = E\left(\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right)$ .

a. Montrer que  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  (notation du III.B.).

On dit qu'on a un développement en fraction continue fini de  $\alpha$ .

On pourra adapter à cette situation l'étude faite dans le cas où  $\alpha$  est irrationnel.

$\alpha$  étant écrit sous forme fractionnaire  $\frac{p}{q}$ , vérifier que  $a_0, a_1, \dots, a_{n_0}$

sont obtenus à partir de l'algorithme d'Euclide pour la recherche du plus grand commun diviseur de  $p$  et  $q$  et qu'on a  $a_{n_0} \geq 2$ .

b. Dans chacun des deux cas,  $\alpha = \frac{193}{71}$  et  $\alpha = \frac{2721}{1001}$ , expliciter

$a_0, a_1, \dots, a_{n_0}$ .



◇ Soit  $(a_n)$  une suite d'entiers naturels, strictement positifs sauf peut-être  $a_0$ .

On lui associe la suite  $(r_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbf{N}, r_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  (voir III.B.)

On pourrait, en introduisant les suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  définies à partir de la suite  $(a_n)$ , comme au III.B.2. ainsi que la suite de fonctions  $(\varphi_n)$ , démontrer que la suite  $(r_n)$  est convergente et que sa limite  $\alpha$  a pour développement en fraction continue  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ , mais nous admettrons tout ceci dans la fin de ce problème.

#### IV. DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE $e$

Les notations sont celles de la partie II.

1. Développement en fraction continue de  $\text{th} \frac{1}{2}$ .

a. Vérifier que les suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  sont caractérisées par les conditions  $p_0 = 0, p_1 = 1, q_0 = 1, q_1 = 2$  et

$$\forall n \geq 2, p_n = 2(2n-1)p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = 2(2n-1)q_{n-1} + q_{n-2}.$$

b. En déduire que le développement en fraction continue de  $\text{th} \frac{1}{2}$  est :

$$\text{th} \frac{1}{2} = [0, 2, 6, 10, \dots, 2(2n-1), \dots].$$

2. Développement en fraction continue de  $e$ .

a. Montrer que  $e = \frac{1 + \text{th} \frac{1}{2}}{1 - \text{th} \frac{1}{2}}$ .

b. Vérifier que,  $\forall n \in \mathbf{N}, q_n > p_n$ .

c. Démontrer que la suite  $\left(\frac{q_n + p_n}{q_n - p_n}\right)$  a pour limite  $e$  et plus précisément que,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \frac{q_{2n} + p_{2n}}{q_{2n} - p_{2n}} < e < \frac{q_{2n+1} + p_{2n+1}}{q_{2n+1} - p_{2n+1}},$$

d. On pose  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = q_n + p_n, v_n = q_n - p_n$ .

Montrer que,  $\forall n \geq 2, u_n = 2(2n-1)u_{n-1} + u_{n-2}$ .

$$v_n = 2(2n-1)v_{n-1} + v_{n-2}.$$

Calculer  $u_n$  et  $v_n$  pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

Dire pourquoi  $\frac{u_n}{v_n}$  ne peut être le développement en fraction continue d'ordre  $n$  de  $e$ .

e. Calculer  $u_n$  et  $v_n$  pour les valeurs 2, 3, 4 de  $n$ .

L'expression des développements en fraction continue de  $\frac{193}{71}$  et  $\frac{2721}{1001}$

suggère d'introduire  $\alpha = [2, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots]$  avec :

$\forall n \in \mathbb{N}, c_{3n+1} = c_{3n+3} = 1, c_{3n+2} = 2n + 2.$

On note  $\frac{y_n}{z_n}$  la forme irréductible du développement en fraction continue d'ordre  $n$  de  $\alpha$ .

i. Montrer que  $\forall n \geq 3 \quad y_{3n-2} = 2(2n-1)y_{3n-5} + y_{3n-8}$

$$z_{3n-2} = 2(2n-1)z_{3n-5} + z_{3n-8}.$$

On pourra utiliser la relation de récurrence vérifiée par les suites  $(y_k)$  et  $(z_k)$  pour les valeurs de  $k : 3n-2, 3n-3, 3n-4, 3n-5, 3n-6.$

ii. Montrer qu'on a,  $\forall n \geq 1, \quad u_n = y_{3n-2}, v_{3n-2}.$

f. Dédire des résultats précédents que

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \dots, c_n, \dots].$$

g. *Application numérique.*

Munir la calculatrice d'un programme permettant d'obtenir, à partir de la suite  $(c_n)$ , les suites  $(y_n)$  et  $(z_n)$ . Compte tenu de la capacité de la machine, indiquer le plus grand entier  $n_1$  pour lequel les valeurs affichées de  $y_{n_1}$  et  $z_{n_1}$  sont exactes.

Préciser le sens de l'erreur commise et un majorant de cette erreur si on prend  $\frac{y_{n_1}}{z_{n_1}}$  comme approximation de  $e$ .

## Deuxième composition de mathématiques

Durée 5 heures

L'épreuve est construite sur le thème du tétraèdre, à partir d'activités envisageables en classe.

La première partie porte sur une étude de configurations planes que l'on exploite dans la deuxième partie relative à des tétraèdres particuliers. Ces deux parties sont indépendantes dans une large mesure. La troisième partie est consacrée à l'étude des sections planes d'un tétraèdre quelconque ; elle met en œuvre le produit vectoriel. Cette dernière partie est indépendante des deux premières.

### Première partie

Soit dans le plan quatre demi-droites distinctes  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  et  $S_t$  de même origine  $S$ . Les angles géométriques  $\widehat{xSy}$  et  $\widehat{ySz}$  d'une part,  $\widehat{ySz}$  et  $\widehat{zSt}$  d'autre part, sont adjacents. Chacun de ces trois angles a une mesure strictement inférieure à  $\pi$  et la somme de leurs mesures est strictement inférieure à  $2\pi$ .

La construction de quatre points  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  appartenant respectivement aux demi-droites  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  et  $S_t$  est satisfaisant à certaines contraintes fait l'objet de cette première partie.

1. Dans cette question, la contrainte  $(C_1)$  à laquelle sont soumis les quatre points  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$  appartenant respectivement aux demi-droites  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  et  $S_t$  est la suivante:

$$(C_1) \quad \begin{array}{l} - M, N, P \text{ et } Q \text{ sont distincts de } S ; \\ - SM = SQ ; \\ - \text{Les trois triangles } SMN, SNP \text{ et } SPQ \text{ ont} \\ \text{même aire.} \end{array}$$

- 1.1. Démontrer que si quatre points  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$  satisfont à la contrainte  $(C_1)$  alors il en est de même de leurs images dans toute homothétie de centre  $S$  et de rapport  $k$ ,  $k > 0$ .

Dans la suite de cette première partie, le point  $M$  de la demi-droite  $S_x$ ,  $M$  distinct de  $S$ , est supposé **donné**.

- 1.2.a. Faire une figure d'étude  $\mathcal{F}_1$  représentant les quatre demi-droites  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  et  $S_t$  ainsi que le point M, en prenant:

$$\widehat{xSy} = \frac{2\pi}{3}, \quad \widehat{ySz} = \frac{\pi}{6}, \quad \widehat{zSt} = \frac{\pi}{4}; \quad SM = 5 \text{ cm}$$

On s'appuiera sur cette figure pour traiter la question 1.2.b. suivante dans laquelle la longueur SM et les angles  $\widehat{xSy}$ ,  $\widehat{ySz}$ ,  $\widehat{zSt}$  ne sont plus particularisés.

b. En utilisant le fait que l'égalité des aires des triangles SMN et SNP équivaut à l'égalité des distances des points M et P à la droite (SN), montrer que les triangles SMN et SNP ont la même aire si et seulement si le milieu U du segment [MP] appartient à la droite (SN). Situer d'une manière analogue le milieu V du segment [NQ] pour que les triangles SNP et SPQ aient la même aire.

En déduire, à partir de la donnée du point M, la détermination des points N, P, Q satisfaisant à la contrainte (C<sub>1</sub>). Construire ces points sur la figure  $\mathcal{F}_1$ .

- 1.3. Dans cette question, on étudie des configurations particulières.

a. Faire une figure  $\mathcal{F}_2$  représentant les quatre demi-droites  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  et  $S_t$  en prenant :  $\widehat{xSy} = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\widehat{ySz} = \frac{\pi}{6}$ ,  $\widehat{zSt} = \frac{\pi}{2}$  ; le point M est tel que  $SM = 5 \text{ cm}$ .

Construire sur la figure  $\mathcal{F}_2$  les points M, N, P, Q vérifiant la contrainte (C<sub>1</sub>). Montrer que dans ce cas particulier la droite (PQ) est parallèle à la droite (SN) et en déduire que le point V, milieu du segment [NQ], est aussi le milieu du segment [SP]. Montrer également que le triangle NPQ a pour périmètre le périmètre de la ligne polygonale MNPQ d'extrémités M et Q et pour aire, l'aire commune aux triangles SMN, SNP et SPQ.

b. Plus généralement, les angles  $\widehat{xSy}$ ,  $\widehat{ySz}$ ,  $\widehat{zSt}$  et la distance SM n'étant plus particularisés, on recherche pour quelles configurations les points M, N, P, Q satisfaisant à la contrainte (C<sub>1</sub>) sont tels que le milieu V du segment [QN] soit aussi le milieu du segment [SP].

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) le point V, milieu du segment [QN], est le milieu du segment [SP] ;
- (ii) le quadrilatère SNPQ est un parallélogramme ;
- (iii) la droite (SN) est parallèle à la droite (PQ) ;

(iii) le milieu du segment  $[MQ]$  appartient à la droite  $(SN)$ .

En déduire que, les points  $M, N, P$  et  $Q$  satisfaisant à  $(C_1)$ , le point  $V$  milieu du segment  $[QN]$  est également le milieu du segment  $[SP]$  dans les deux cas particuliers suivants :

1° La mesure de l'angle  $\widehat{xSy}$  est la somme des mesures des deux angles  $\widehat{ySz}$  et  $\widehat{zSt}$ . Les propriétés du 1.3.a. relatives au périmètre et à l'aire du triangle  $NPQ$  se généralisent-elles ?

2° La somme des mesures des angles  $\widehat{xSy}, \widehat{ySz}, \widehat{zSt}$  est égale à  $\pi$ . En s'appuyant sur une figure, montrer dans ce cas particulier les propriétés suivantes:

- les triangles  $SMN, SNP$  et  $SPQ$  sont isométriques ;
- le triangle  $NPL$ , où  $L$  désigne le point d'intersection des droites  $(MN)$  et  $(PQ)$  a même périmètre et même aire que les triangles  $SMN, SNP$  et  $SPQ$ ;
- le point  $U$ , milieu du segment  $[MP]$ , est aussi le milieu du segment  $[SN]$ .

2. Dans cette question, on cherche quelles conditions imposer aux demi-droites  $Sx, Sy, Sz$  et  $St$  pour que,  $M$  étant toujours donné, les quatre points  $M, N, P, Q$  appartenant respectivement à ces demi-droites et satisfaisant à la contrainte  $(C_1)$  vérifient aussi la propriété  $(p)$  :

On peut construire un triangle  $NPR$  tel que :

- (p)  $\diamond$  les points  $S$  et  $R$  sont de part et d'autre de la droite  $(NP)$   
 $\diamond NR = NM ; PR = PQ ;$   
 $\diamond$  les triangles  $NPR$  et  $SNP$  ont la même aire.

On note toujours  $U$  le milieu du segment  $[MP]$  et  $V$  le milieu du segment  $[NQ]$ .

2.1. Montrer que si le point  $R$  existe, alors le milieu  $W$  du segment  $[SR]$  appartient à la droite  $(NP)$ .

2.2. En exploitant la question 1.3.b., montrer que la propriété  $(p)$  est réalisée pour les quatre points  $M, N, P, Q$  satisfaisant à  $(C_1)$  dans les cas particuliers suivants :

- la somme des mesures des trois angles  $\widehat{xSy}, \widehat{ySz}, \widehat{zSt}$  est égale à  $\pi$  ;
- la mesure de l'un des trois angles  $\widehat{xSy}, \widehat{ySz}, \widehat{zSt}$  est égale à la somme des mesures des deux autres.

Dans chacun de ces cas, faire une figure indiquant la construction du point

R. Indiquer chaque fois la disposition des points U, V, W par rapport aux points I, J, K, milieux respectifs des côtés [SN], [SP] et [PN] du triangle SNP.

2.3. Soit M, N, P, Q quatre points satisfaisant à la contrainte ( $C_1$ ) ; on recherche à quelles conditions la propriété ( $p$ ) est réalisée. Pour cela, en supposant que le point R existe, on étudie la disposition des six points U, V, W, I, J, K, où I, J et K désignent toujours les milieux respectifs des segments [SN], [SP] et [NP].

a. Démontrer les égalités :

$$UJ = VI ; \quad WJ = VK ; \quad UK = WI.$$

b. Soit T le point d'intersection des perpendiculaires menées des points M et Q respectivement aux droites (SN) et (SP). Montrer que  $NM^2 - NT^2 = PQ^2 - PT^2$ . En déduire que le point T appartient à la perpendiculaire menée de R à la droite (NP).

c. Soit H l'orthocentre du triangle SNP. Démontrer que les points U, V et W sont les projetés orthogonaux du milieu  $\Omega$  du segment [TH] sur les droites (SN), (SP), (PN) respectivement.

d. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle SNP.

On suppose  $U \neq I$  et  $V \neq J$ . Démontrer que  $W = K$  ; pour cela, on mettra en œuvre dans un premier temps la rotation  $r$  telle que  $r(U)=I$  et  $r(J)=V$  après avoir caractérisé son centre.

e. Déduire de cette étude que les seules dispositions possibles des points U, V, W, I, J, K pour que la propriété ( $p$ ) soit réalisée sont :

$$\begin{array}{lll} 1^\circ U = I ; & V = J ; & W = K. \\ 2^\circ U \neq I ; & V \neq J ; & W = K. \\ 3^\circ U \neq I ; & V = J ; & W \neq K. \\ 4^\circ U = I ; & V \neq J ; & W \neq K. \end{array}$$

2.4. En utilisant les questions 2.2. et 2.3., quelle conclusion peut-on apporter à l'étude entreprise dans cette deuxième question ?

3. Dans le cas particulier où les demi-droites  $S_x$  et  $S_t$  sont opposées, les triangles SMN, SNP, SPQ sont isométriques. Leur périmètre est celui de la ligne polygonale MNPQ d'extrémités M et Q. Plus généralement, on recherche quelles conditions imposer aux demi-droites  $S_x, S_y, S_z, S_t$  pour qu'elles satisfassent à la contrainte ( $C_2$ )

- $\diamond$  M, N, P, Q sont distincts de S et  $SM = SQ$ .  
 (C<sub>2</sub>)  $\diamond$  Les trois triangles SMN, SNP et SPQ ont le même périmètre égal au périmètre de la ligne polygonale MNPQ d'extrémités M et Q.

- 3.1. Montrer que l'on peut toujours supposer le point M donné.  
 3.2. Soit quatre points M, N, P, Q satisfaisant à la contrainte (C<sub>2</sub>).  
 Ecrire les relations liant les nombres  $x = SM$ ,  $y = SN$ ,  $z = SP$ ,  
 $l_1 = MN$ ,  $l_2 = NP$ ,  $l_3 = PQ$ .  
 Exprimer  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en fonction de  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  et conclure.

## Deuxième partie

### A. Tétraèdre trirectangle.

L'étude porte sur le "patron" d'un tel tétraèdre. Soit un tétraèdre SABC et  $(\pi)$  le plan de la face ABC ; on appelle développement dans  $(\pi)$  (ou "patron") du tétraèdre, l'ensemble des quatre triangles formés par la face ABC et les rabattements sur  $(\pi)$  à l'extérieur de ABC, des trois autres faces, les droites (BC), (CA) et (AB) servant de charnières. Les rabattement de S sont notés S<sub>1</sub> (face SBC), S<sub>2</sub> (face SCA) et S<sub>3</sub> (face SAB).

Dans toute cette question, on impose que les trois faces SBC, SCA et SAB soient rectangles en S ; on dira que le tétraèdre est trirectangle en S.

- 1.1 Soit H la projection orthogonale de S sur le plan  $(\pi)$  et H<sub>1</sub> la projection orthogonale de S sur la droite (BC). Faire un dessin en perspective. Montrer que A, H, H<sub>1</sub> sont alignés. Quel est le rôle de H pour la face ABC ? Montrer que cette face a trois angles aigus.  
 1.2. Sachant que les côtés de la face ABC ont pour longueurs  
 $BC = \sqrt{10}$ ,  $CA = \sqrt{7}$ ,  $AB = \sqrt{5}$   
 calculer les longueurs des arêtes [SA], [SB] et [SC]. L'unité de longueur étant 3 cm, indiquer la construction des segments [BC], [CA] et [AB] et dessiner le développement du tétraèdre. On s'appuiera sur la figure obtenue pour traiter la question suivante dans laquelle les longueurs des côtés du triangle ABC ne sont plus particularisées.  
 1.3. Soit  $\omega$  le centre du cercle circonscrit au triangle S<sub>1</sub>S<sub>2</sub>S<sub>3</sub>. Déterminer l'image de la droite (S<sub>1</sub>C) dans la symétrie orthogonale d'axe  $(\omega C)$  ainsi que l'image de la droite (S<sub>1</sub>B) dans la symétrie orthogonale d'axe  $(\omega B)$ . Montrer que les droites (S<sub>2</sub>C) et (S<sub>3</sub>B) sont symétriques par rapport à la

droite  $(A\omega)$  et en déduire que les droites  $(s_1B)$  et  $(S_1C)$  sont symétriques par rapport à la droite  $(\omega S_1)$ .

- 1.4. On dispose d'une plaque de carton de forme circulaire sur le bord de laquelle on a marqué trois points  $S_1, S_2, S_3$  n'appartenant pas à un même demi-cercle. Construire un triangle inclus dans la plaque tel que " $S_1, S_2, S_3, ABC$ " soit le développement d'un tétraèdre ABC trirectangle en S.

### B. Tétraèdre équifacial.

1. Lien avec le tétraèdre trirectangle et le parallélépipède rectangle.

Soit SABC un tétraèdre trirectangle en S. On note P le milieu du segment [BC], Q le milieu du segment [CA] et R le milieu du segment [AB].

1.1. Démontrer que les arêtes opposées du tétraèdre PQRS ont même longueur. En déduire que les faces de ce tétraèdre sont isométriques.

On dira qu'un tel tétraèdre est équifacial.

- 1.2. Soit I le milieu de l'arête [PQ] et J le milieu de l'arête [SR]. Démontrer que la droite (IJ) est un axe de symétrie du tétraèdre PQRS et déterminer deux autres axes de symétrie.

Soit O le milieu du segment [IJ]. Montrer que le point O est l'isobarycentre des quatre points P, Q, R, S ainsi que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre PQRS.

- 1.3. Soit ABCD un tétraèdre tel que  $AB = CD$  et, E et F désignant les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD], tel que la droite (EF) soit orthogonale aux droites (AB) et (CD). Ainsi, la droite (EF) est un axe de symétrie du tétraèdre ABCD.

Soit  $A', B', C', D'$  les images respectives des sommets A, B, C, D du tétraèdre dans la symétrie centrale de centre le point  $\Omega$ , milieu du segment [EF].

a. Montrer que  $AC'BD'$  est un rectangle.

b. Démontrer que A, C', B, D', B', D, A', C sont les huit sommets d'un parallélépipède rectangle.

c. Démontrer que le tétraèdre ABCD est équifacial.

d. En s'appuyant sur un dessin, indiquer comment on peut extraire un tétraèdre équifacial d'un parallélépipède rectangle. Examiner aussi le cas particulier du cube.

2. Développement du tétraèdre équifacial.



Dans cette question, on admet la propriété : dans tout tétraèdre, en chaque sommet du tétraèdre les angles des faces contenant ce sommet ont une somme strictement inférieure à  $2\pi$  et chacun de ces angles est strictement inférieur à la somme des deux autres.

- 2.1. En utilisant la première partie, montrer que pour qu'un tétraèdre soit équifacial, il suffit que ses faces aient la même aire.
- 2.2. Etablir que pour qu'un tétraèdre soit équifacial, il suffit qu'en chaque sommet du tétraèdre la somme des angles des faces contenant ce sommet soit égal à  $\pi$ . Pour cela, on exploitera le développement du tétraèdre.
3. Tétraèdre dans lequel l'isobarycentre  $\Omega$  des sommets A, B, C, D est le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre

Les points A, B, C, D vérifient par hypothèse :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega A} + \vec{\Omega B} + \vec{\Omega C} + \vec{\Omega D} &= \vec{0} \\ \Omega A &= \Omega B = \Omega C = \Omega D\end{aligned}$$

On note E le milieu du segment [AB] et F le milieu du segment [CD].

- 3.1. Montrer que la droite (EF) est un axe de symétrie du tétraèdre ABCD.
- 3.2. Démontrer que le tétraèdre ABCD est équifacial.

### Troisième partie

*Tétraèdre quelconque. Aire de l'intersection avec un plan.*

L'objet de cette partie est de démontrer, par le calcul vectoriel, qu'un plan de section d'aire maximale d'un tétraèdre est nécessairement le plan d'une face.

L'espace est orienté. Soit ABCD un tétraèdre ; on pose :

$$2\vec{S}_1 = \vec{AC} \quad \vec{AD} ; 2\vec{S}_2 = \vec{AD} \quad \vec{AB} ; 2\vec{S}_3 = \vec{BC} \quad \vec{BD} .$$

1. Etablir l'égalité :  $\vec{S}_4 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ .
2. Sections triangulaires

Soit les points  $M_1, M_2, M_3$  définis par :

$$\vec{AM}_1 = \alpha \vec{AB} ; \vec{AM}_2 = \beta \vec{AC} ; \vec{AM}_3 = \gamma \vec{AD},$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont trois nombres réels de l'intervalle  $]0,1[$ .

2.1. On pose  $\vec{2T} = \vec{M_1M_2} + \vec{M_1M_3}$

- Exprimer  $\vec{T}$  comme combinaison linéaire de  $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$ .
- Montrer que, pour tout réel  $\rho$  :

$$\vec{T} = (\beta\gamma - \rho)\vec{S}_1 + (\gamma\alpha - \rho)\vec{S}_2 + (\alpha\beta - \rho)\vec{S}_3 + \rho\vec{S}_4.$$

En choisissant  $\rho = \inf(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$ , montrer que :

$$|\vec{T}| \leq \text{Max} (|\vec{S}_1|; |\vec{S}_2|; |\vec{S}_3|; |\vec{S}_4|);$$

on pourra utiliser l'égalité suivante où  $a, b, c$  désignent trois nombres réels :  $a(b+c) - bc = a^2 - (a-b)(a-c)$ .

2.2. Interpréter les normes des vecteurs  $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$  et  $\vec{T}$  ; résoudre le problème des sections triangulaires d'aire maximale.

3. Sections quadrangulaires.

Soit les points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  définis par :

$\vec{AM}_1 = \alpha\vec{AB}$  ;  $\vec{AM}_2 = \beta\vec{AC}$  ;  $\vec{DM}_3 = \lambda\vec{DC}$  ;  $\vec{DM}_4 = \mu\vec{DB}$  où  $\alpha, \beta, \lambda, \mu$  sont quatre nombres réels de l'intervalle  $]0,1[$ .

On suppose que les quatre points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sont coplanaires et

on pose :  $2\vec{Q} = \vec{M_1M_3} + \vec{M_2M_4}$ .

3.1. Interpréter la norme de  $\vec{Q}$ .

3.2. Exprimer  $\vec{Q}$  comme combinaison linéaire de  $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$  :

$$\vec{Q} = k_1\vec{S}_1 + k_2\vec{S}_2 + k_3\vec{S}_3$$

Vérifier que  $k_1$  et  $k_2$  sont positifs et que :

$$1 - k_1 - k_2 + k_3 = (1 - \alpha - \lambda)(1 - \beta - \mu).$$

3.3. La coplanarité de  $M_1, M_2, M_3, M_4$  s'exprime par une relation entre  $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ . Former cette relation et en déduire que le produit précédent  $(1 - \alpha - \lambda)(1 - \beta - \mu)$  est positif.

3.4. Dans l'hypothèse  $\alpha\beta \leq \lambda\mu$  montrer que :

$$|\vec{Q}| = \text{Max} (|\vec{S}_1|; |\vec{S}_2|; |\vec{S}_3|).$$

Dans le cas où  $\alpha\beta > \lambda\mu$ , quelle autre expression de  $\vec{Q}$  mettrait-on en œuvre pour conclure ?