Echanges

Sur un problème de Gergonne

E.EHRHART
Strasbourg

En 1816, dans les *Annales des mathématiques* (VI, page 228), leur fondateur J.D.GERGONNE remarque : "il serait intéressant de savoir si la distance d des centres des sphères inscrites et circoncrites à un tétraèdre peut s'exprimer uniquement par leurs rayons r et R ". Nous allons montrer qu'il n'en est rien.

Supposons $d = f(r, R)$. Pour le tétraèdre équifacial les deux sphères sont concentriques et on aurait $R = g(r)$. Or, s'il est en plus régulier, $R = 3r$, alors que pour tout autre tétraèdre, équifacial ou non, $R > 3r$.(*Bulletin*, décembre 1989, page 724).

Remarques :

1) Seul le tétraèdre équifacial a ses sphères inscrite et circonscrite concentriques.(HONSBERGER, "Joyaux mathématiques" , Vol.2, page 117. Cédic).

2) On sait que pour les cercles circonscrit et inscrit de tout triangle $R \geq 2r$, l'égalité n'étant atteinte que dans le triangle équilatéral. Rappelons aussi que pour ces cercles la distance d des centres vérifie :

$$d^2 = R\ (R - 2r)$$

formule connue depuis 1746 et démontrée entre autres par Euler, Steiner et Jacobi.

On montre par l'absurde que la condition $d^2 = R\ (R - 2r)$, nécessaire pour que deux cercles de rayon $\underline{R}$ et $\underline{r}$ et de distance des centres $\underline{d}$ admettent un triangle inscrit dans l'un et circonscrit dans l'autre, est aussi suffisante, et qu'alors ils en admettent même une infinité.