Programmes

Peut-on réhabiliter le taux de variation ?

Georges LION
Université de Limoges

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je voudrais dissiper le risque de deux malentendus possibles :

- 1 - Le taux de variation n'est pas au programme des classes du second degré. Mon propos n'est pas de suggérer aux professeurs de traiter cette notion, même par le biais d'"activités" plus ou moins hypocrites, car il y aurait là un *facteur d'inflation*. Je souhaite seulement exprimer mon avis sur l'intérêt du taux de variation dans la progression des élèves en mathématiques, en espérant des jours meilleurs où cet avis pourra se concrétiser.

- 2 - De même qu'en géométrie les triangles égaux ou semblables ont été écartés au profit du "tout transformation", je suppose que le taux de variation est actuellement écarté au profit de l'approximation affine. Mon but n'est pas de répondre à l'arbitraire par l'intolérance ; je reconnais volontiers que l'approximation affine convient aux plus "intellectuels" de nos élèves, à ceux que les symboles n'effraient pas et qui les traduisent aisément en pensées ou en paroles. Mais peut-on se limiter à ceux-là, dans un pays qui ne produit même pas le moitié des diplômés en mathématiques dont il a besoin ? Il faut, à mon avis, *compléter* (*) (et non concurrencer) une telle présentation par des représentations concrètes, afin de donner leur chance à ceux qui peuvent ainsi

(*) Lire à ce sujet : *Echanges* , par Raymond BARRA, *Bulletin n°332*.

pallier les "lacunes" de leurs capacités intellectuelles (je précise que je me range dans cette ceuxième catégorie d'élèves).

Ces deux mises au point étant faites, je voudrais d'abord évoquer à grands traits de nombreuses situations mathématiques de tout niveau, dans lesquelles intervient le taux de variation ; ensuite je tracerai quelques pistes à exploiter dans l'hypothèse (optimiste) où cette notion reviendrait au programme.

Nul ne conteste l'importance de la proportionnalité, même à un niveau élémentaire ; le taux de variation constitue le premier lien que l'on peut établir entre la proportionnalité et sa traduction graphique. Il est vrai que s'est instaurée dans les collèges une habitude fâcheuse à mon avis : lorsqu'il s'agit de trouver l'équation d'une droite passant par deux points, on préfère résoudre un système linéaire de deux équations, plutôt que de chercher le coefficient directeur de la droite, c'est-à-dire le taux de variation de la fonction que cette droite représente ; ce faisant, on se prive de contrôle graphique du résultat, on s'éloigne de la prise de conscience du problème posé, et on perd une belle occasion d'appliquer le théorème de Thalès.

Il n'est pas nécessaire de quitter l'enseignement secondaire pour avoir l'occasion de se pencher sur des problèmes de points fixes, c'est-à-dire de résolution approchée d'équations du type $f(x) = x$ .Pour ce faire, on détermine un intervalle dans lequel f définit une *contraction*, ce qui s'exprime par un encadrement du taux de variation ; notons qu'intervient ici l'aspect global (et non local) du taux de variation.

Au delà, nul ne niera l'importance de la notion de fonction *Lipschitzienne*, y compris en mathématiques appliquées, par exemple lors de la résolution d'équations différentielles ou d'équations intégrales.

Les notions de convexité et de concavité reçoivent une approbation un peu moins unanime ; pourtant leur fécondité n'est plus à prouver : obtention d'inégalités et problèmes d'optimisation, comportement local ou à l'infini des fonctions (la concavité de ln permet de prouver facilement : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$) .

Pour bien approfondir la convexité, le taux de variation est indispensable. Certes, on m'objectera que toutes les fonctions ne sont pas convexes ou concaves, même par morceaux ; et voici que se présente l'inévitable $x \to x^{\alpha} \sin \frac{1}{x}$, mais s'est-on jamais demandé si cette fonction avait quelque part un statut différent de celui de contre-exemple ? Ses belles oscillations masquent son caractère *pathologique*, aussi sûrement quer les vocalises de la Reine de le Nuit cachent ses maléfices dans la Flûte enchantée.

En revanche, lorsque nos élèves peinent sur des calculs de valeurs approchées des racines d'un polynôme, ne serait-il pas utile de rattacher l'efficacité des méthodes employées à la convexité et au taux de variation ?

Cette dernière question me ramène aux élèves des lycées. Voici donc quelques idées sans prétention pouvant mettre en valeur le taux de variation :

- 1 -D'abord un exercice qui, je l'espère, serait assez bien résolu en seconde :
Le jeune Achille est parti depuis deux heures, pour une randonnée cycliste et déclare avoir parcouru 70 kilomètres. A sa maman, toute frémissante d'inquiétude rétrospective, il affirme nonobstant n'avoir jamais roulé à une vitesse supérieure à 30 km/h. Achille a-t-il menti ?

L'avenir mathématique d'un grand nombre d'élèves me semblerait bien assuré, s'ils résolvaient, en seconde, avec autant de bonheur, l'exercice suivant:
Une fonction f ne varie pas de plus de 3 sur tout intervalle de longueur 1. Sachant que f(0) = 0, encadrer f(5).

Il est possible d'imaginer une série d'exercices du même genre :
- Dessiner la région du plan dans lequel la courbe représentative de la fonction f ci-dessus doit nécessairement se trouver.
- On a toujours $f(0) = 0$; sur $[0,2]$ le taux de variation de f est majoré par 3 ; sur $[2,5]$ par 2. Sachant f croissante, localiser de même la courbe représentative.

- 2 - A chaque étage de la Tour de Pise (tant qu'elle est debout !), on place un observateur muni d'un chronomètre ; à l'instant d'un signal lumineux, un objet est lâché du haut de la tour et chaque observateur déclenche son chronomètre. Ensuite, l'instant de passage à chaque étage est déterminé par arrêt du chronomètre correspondant. On dresse le tableau des temps en fonction des distances parcourues ; on calcule les taux de variation, on constate leur décroissance par rapport à chaque extrêmité et on extrapole graphiquement en traçant la courbe représentative d'une fonction concave.

- 2 - On connaît la formule πr^2 pour l'aire du disque de rayon r, on calcule différentes valeurs du taux de variation de cette fonction sur l'intervalle $[r_0 , r_0 + h]$ pour différentes valeurs de h. De même pour $h < 0$.

Inversement, un nombre α étant donné dans $[\pi r_0 , \infty[$, existe-t-il une *sécante* à la courbe représentative qui soit de coefficient directeur α (cette sécante passant toujours par le point $(r_0 , \pi r_0^2)$? La valeur $\alpha = 2\pi r_0$ faisant exception, interpréter graphiquement la droite de coefficient directeur $2\pi r_0$ (**)

- 4 - Connaissant la formule du binôme de Newton, montrer que $x \rightarrow \frac{a^x - 1}{x}$ $(a > 1)$ est croissante sur $\mathbf{N}^*$, puis sur $\mathbf{Q}_+^*$ .Qu'en déduire sur la fonction exponentielle ?

Je ne voudrais pas lasser la patience du lecteur par de longues considérations. Qu'on me laisse cependant, en conclusion, aborder la notion d'un point de vue historique. Quoique très ignorant en la matière, je crois pouvoir affirmer que le calcul des différences finies (notamment les équations aux différences) s'est développé antérieurement au calcul différentiel (et aux équations du même nom). De nos jours, le machinisme, qui ouvre de belles perspectives aux mathématiques "discrètes", peut ainsi compléter l'apport des mathématiques "infinitésimales" aux autres sciences, et permettre le choix d'une méthode selon le contexte.

(**) Lire à ce sujet : *Sur la représentation de la dérivée en première - Bulletin* n°342.