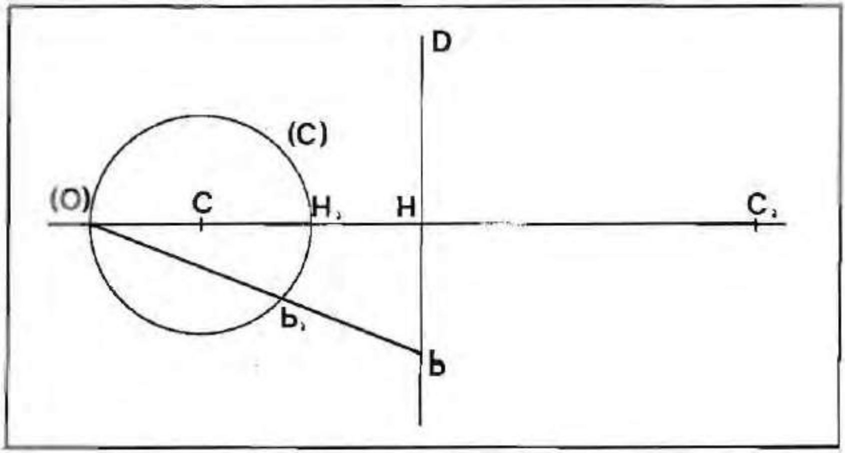
Dans nos classes

Les constructions au compas seul

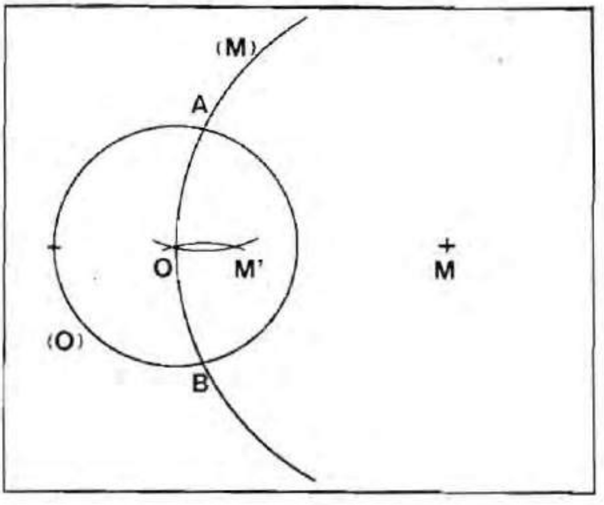
Jean Pierre CLOU
Lycée Perier - Marseille

Les articles ou ouvrages traitant de la question, que j'ai eus entre les mains, donnent des solutions. On se demande comment leurs auteurs les ont trouvées tellement elles sont compliquées. La clé (je ne sais pas si, historiquement, c'est vrai) réside dans une petite remarque que l'on trouve dans tous les cours sur l'inversion à propos de l'inverse d'un cercle (C) passant par le pôle. Si (D) est la droite inverse de (C), la remarque est la suivante :

Remarque : L'inverse du centre de (C) est le symétrique du pôle par rapport à (D).



Grâce à cette remarque, il est possible de construire au compas seul l'inverse M' d'un point M dans une inversion positive définie par son cercle d'inversion (O).



Le cas le plus favorable est celui où le cercle (M) de centre M qui passe par le pôle O coupe le cercle (O) en deux points A et B (distincts ou confondus) c'est-à-dire quand OM $\geq r / 2$ (r étant le rayon du cercle (O), l'inverse de (M) est (AB), d'où la construction de M'. Lorsque le cercle (M) ne coupe pas le cercle (O), on remplace M par un point plus éloigné de O : soit M_1 le symétrique de O par rapport à M (il se construit au compas seul, c'est très facile) M' est alors le symétrique de O par rapport à M'_1.

Si $OM_1 \geq r / 2$, la construction précédente s'applique au point M_1 et permet d'obtenir M'_1 et par suite M', sinon on réitère avec M_2 symétrique de O par rapport à M_1 et ainsi de suite. Donc théoriquement, il est possible de construire au compas seul l'inverse d'un point quelconque.

Applications :

1) Problème de Napoléon : détermination du centre (perdu), ω, d'un cercle (C) au compas seul.

Méthode : on choisit un cercle (O) dont le centre appartient à (C) et qui coupe (C) en deux points A et B; on sait construire l'inverse ω' de ω dans l'inversion positive de cercle d'inversion (O), c'est le symétrique de O par rapport à (AB). Il ne reste plus qu'à construire l'inverse de ω' pour retrouver ω ; c'est la construction classique. Seule la construction de ω' peut poser des problèmes (si l'on veut aboutir du premier coup). Il faut que $O\omega' \geq r / 2$ (r étant le rayon de (O)). Or $O\omega' = \frac{r^2}{R}$ (R étant le rayon de (C)). Donc, il faut que $r \geq \frac{R}{2}$.

2) Centre du cercle passant par trois points A, B, C donnés.

Si on prend le cercle de centre A qui passe par B par exemple pour cercle d'inversion, B a pour inverse B, C a pour inverse C'. On construit C', puis le symétrique de A par rapport à (BC'). Soit ω' ce point. C'est l'inverse du centre ω du cercle (ABC). Il ne reste plus qu'à construire l'inverse de ω'.

3) Intersection de deux droites (AB) et (CD).

Soit O un point n'appartenant pas à ces droites et (O) un cercle de centre O et de rayon quelconque. On construit les cercles inverses de (AB) et (CD). Ils se coupent en O et en un autre point M. L'inverse de M est le point d'intersection de (AB) et (CD). Pour construire le cercle inverse de (AB), on construit son centre : c'est l'inverse du symétrique de O par rapport à (AB). Si on choisit bien le cercle (O), ces constructions aboutissent rapidement.

4) Intersection d'une droite (AB) et d'un cercle (C) dans le cas ennuyeux où (AB) passe par le centre ω de (C).

On choisit le cercle d'inversion (O) orthogonal au cercle (C). Pour cela, on choisit un point I extérieur à (C) et sur le cercle (I) de centre I passant par ω. O est le point diamétralement opposé à I. Le cercle

(O) est alors le cercle de centre O et qui passe par les points d'intersection des cercles (C) et (I).

Si on a pris soin de prendre I en dehors de (AB), dans l'inversion qui a pour cercle d'inversion (O), (C) est globalement invariant et (AB) a pour inverse un cercle (γ) que l'on construit, (γ) et (C) se coupent en deux points C et D. Il suffit de construire les inverses de ces deux points. Ici aussi, les constructions aboutissent rapidement si on choisit bien le cercle (O).

5) Milieu de [AB] .

Soit I le milieu de [AB]. Si on prend pour cercle d'inversion le cercle de centre A et de rayon AB, l'inversion transforme le cercle de diamètre [AB] en la tangente en B au cercle d'inversion. L'inverse de I est donc le symétrique de A par rapport à B ; soit I' ce point. Il ne reste plus qu'à construire l'inverse de I' (bien entendu, on ne construit que I' et I).

6) Les points A, B et C étant donnés, construire le cercle de centre C et de rayon AB. (Le compas ne sert ici qu'à tracer le cercle de centre donné passant par un point donné. On s'interdit le report des distances).

On construit une suite $A_0 = A, A_1, ..., A_n$ telle que :

$A_0A_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n = AB$ et $0 < A_nC \leq AB$

(On peut par exemple construire les points d'intersection de la droite (AC) avec le cercle de centre A qui passe par B, puis, à partir de là, graduer la droite (AC) sans tracer cette droite; le point C appartiendra à l'un des segments de longueur AB déterminés par cette graduation).

La suite $A_0, A_1, ... , A_n$ étant ainsi construite, soit (γ) le cercle de centre A_n qui passe par A_{n-1}. Il suffit, pour résoudre le problème, de construire les points d'intersection de (γ) avec la médiatrice de $[A_nC]$; pour ne pas avoir à reporter des distances, on effectue l'inversion de cercle d'inversion (γ) ; on construit l'inverse C' de C; le cercle de centre C' qui passe par le pôle A_n est l'inverse de la médiatrice de $[A_nC]$. Ce cercle coupe (γ) aux points cherchés (on a intérêt à choisir A_n de telle sorte que $A_nC \geq \frac{AB}{2}$).