Dans nos classes

Petit formulaire pour situer les points remarquables d'un triangle

Pascal Michel
Ecole Normale de Cergy

Comment savoir rapidement où se trouvent les points remarquables d'un triangle, en les repérant par leurs coordonnées dans un repère euclidien, sans avoir à faire les délicates constructions à la règle et au compas ?
Cet article donne une méthode de calcul très simple qui permet de répondre à cette question.

1 - INTRODUCTION

Qui n'a déjà essayé de construire l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit d'un triangle, pour vérifier *de visu* que le théorème qui affirme que ces trois points sont alignés est bien vrai ? Celui qui se laisse entraîner dans le monde des points dits "remarquables" du triangle ne verra pas facilement le bout de ses joies ni de ses peines.

Un premier intérêt des points remarquables est de fournir, dès le niveau du Cours Elémentaire, une mine d'exercices de constructions géométriques qui ont l'avantage d'être auto-évaluatifs. Ainsi, si l'on n'est pas assez soigneux dans la construction des hauteurs d'un triangle, la sanction sera immédiate : les hauteurs ne seront pas concourantes. On peut certes tricher en traçant la troisième hauteur, mais le faux orthocentre ainsi obtenu risque de ne plus être aligné avec le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit.

A un niveau plus élevé, les points remarquables sont l'occasion de nombreux théorèmes dont les démonstrations font appel à toutes les ressources de la géométrie. Une particularité de ce domaine des mathématiques est que les ouvrages anciens qui en traitent ne sont pas caducs, même si de nouveaux livres continuent à paraître sur ce thème (voir par exemple les références [1] et [2]).

Afin de familiariser les élèves-instituteurs avec les manipulations de règles, d'équerres et de compas qu'ils devront eux-mêmes enseigner à leurs élèves, je leur ai souvent fait construire les points remarquables d'un triangle. J'ai ainsi dû évaluer certains de leurs dessins et j'ai découvert combien une telle évaluation était difficile. En effet, mes propres dessins ne pouvaient servir de modèles, et j'ai été amené à chercher par le calcul où se trouvaient sur le dessin, les positions exactes de ces points remarquables.

Ceux qui sont conduits, comme je l'ai été, à dessiner avec une grande précision les points remarquables d'un triangle appécieront l'utilité pratique de ces calculs, par delà l'exercice de géométrie qu'ils constituent. Ils trouveront plus loin l'exemple numérique d'un triangle de côtés de longueurs 21 cm, 20 cm et 13 cm que j'ai proposé à mes élèves. Ils pourront d'autre part facilement, à partir des formules proposées, élaborer un petit programme d'ordinateur qui, sur la donnée des longueurs des trois côtés d'un triangle renverra immédiatement les positions des points remarquables de ce triangle.

2 - LA MÉTHODE

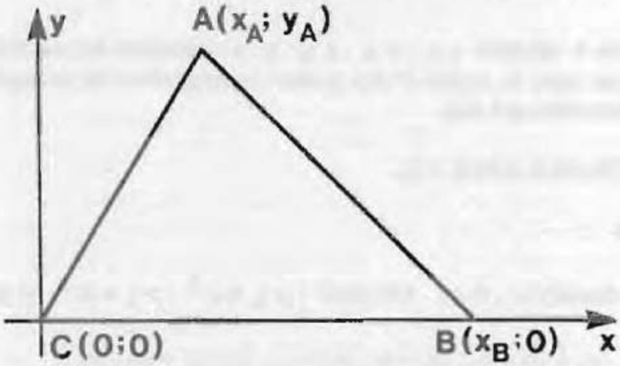
Soit ABC le triangle que l'on considère. Il est entièrement déterminé par les longueurs de ses trois côtés : $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

Le repère le plus pratique pour faire les calculs relatifs à ce triangle est le repère affine $\mathfrak{I}$ dans lequel les points A, B, C ont les coordonnées barycentriques suivantes : A(1,0,0) , B(0,1,0) , C(0,0,1) et le centre de gravité G les coordonnées barycentriques G(1,1,1). Pour simplifier les notations, nous identifierons un point avec ses coordonnées barycentriques dans ce repère ([3]).

Les coordonnées barycentriques d'un point dans le repère affine $\mathfrak{I}$ ne permettent pas immédiatement de savoir où se trouve ce point sur la figure que l'on trace. On va repérer les points de cette figure par leurs coordonnées dans un repère euclidien $\mathfrak{E}$. On a davantage de choix pour ce repère. Un choix simple consiste à donner aux points A, B, C, les coordonnées suivantes :

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C),$$

conformément à la figure, de façon à ce que les distances dans ce repère correspondent aux distances mesurées en centimètres sur la figure.



A ce repère euclidien, on va associer un repère affine P^* dans lequel un point M$(x\,;y)$ du repère euclidien admettra les coordonnées barycentriques suivantes notées M* pour simplifier les notations : M*$(x, y, 1)$. Le passage du repère affine $\mathfrak{I}$ au repère affine P^* se fait grâce à la matrice M, formée en écrivant dans le repère suivant P^* les coordonnées des points de base A, B, C du repère P :

$$M = \begin{pmatrix} x_A & x_B & 0 \\ y_A & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, si M $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathfrak{I}$, on a M* $= \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = M$ M dans le repère $\mathfrak{I}^*$, d'où les coordonnées M$\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$ du point M dans le repère euclidien $\mathfrak{E}$

Inversement M $= M$ M* , où :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y_A} & 0 \\ \frac{1}{x_B} & -\frac{x_A}{x_B y_A} & 0 \\ -\frac{1}{x_B} & \frac{x_A}{x_B y_A} - \frac{1}{y_A} & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à calculer x_A, y_A, x_B et à connaître les coordonnées barycentriques dans le repère P des points remarquables du triangle. C'est l'objet du formulaire qui suit.

3 - LE FORMULAIRE [3].

Généralités :

Seuls sont donnés a , b , c . On pose : $p_1 = a^2$, $p_2 = b^2$, $p_3 = c^2$.

Puis : $q_1 = -p_1 + p_2 + p_3$, $q_2 = p_1 - p_2 + p_3$, $q_3 = p_1 + p_2 - p_3$,
et : $S = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$

Alors $\Delta = \dfrac{\sqrt{S}}{4}$ est l'aire du triangle, $R = \sqrt{\dfrac{p_1 p_2 p_3}{S}}$ le rayon du cercle circonscrit , $r = \dfrac{\sqrt{S}}{2(a+b+c)}$ le rayon du cercle inscrit, et les coordonnées barycentriques dans $\mathfrak{I}$ de nombreux points remarquables vont s'exprimer en fonction de $a, b, c, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ La matrice M permet de passer facilement à des coordonnées directement utilisables. Cette matrice est déterminée par les égalités suivantes : $y_A = \dfrac{2\Delta}{a}$, $x_A = \sqrt{b^2 - y_A^2}$, $x_B = a$

Notons que det $M = -x_B y_A = -2\Delta$

Les sommets :   a = (1,0,0) , B = (0,1,0) , C = (0,0,1)
Les milieux des côtés : $M_A = (0,1,1)$, $M_B = (1,0,1)$, $M_C = (1,1,0)$
Le centre de gravité :   G = (1,1,1)

Les pieds des hauteurs :

$H_A = (0, q_3, q_2)$, $H_B = (q_3, 0, q_1)$, $H_C = (q_2, q_1, 0)$

L'orthocentre :

$H = (1/q_1 , 1/q_2 , 1/q_3) = (q_2 q_3 , q_3 q_1 , q_1 q_2)$

Le centre du cercle circonscrit :

$O = (p_1 q_1 , p_2 q_2 , p_3 q_3)$

Le centre du cercle des 9 points :

$$N = \frac{O + H}{2} = (p_1 q_1 + q_2 q_3 , p_2 q_2 + q_3 q_1 , p_3 q_3 + q_1 q_2$$

$$= (p_2 q_2 + p_3 q_3 , p_1 q_1 + p_3 q_3 , p_1 q_1 + p_2 q_2)$$

Le centre du cercle inscrit :

$I = (a , b , c)$

Les centres des cercles exinscrits :

$J_1 = (-a , b , c)$, $J_2 = (a , -b , c)$, $J_3 = (a , b , -c)$

Les points de contact du cercle inscrit :$I_A = (0 , a+b-c , a-b+c)$, $I_B = (a+b-c , 0 , -a+b+c)$, $I_C = (a-b+c , -a+b+c , 0)$

Les points de contact des cercles exinscrits :

$J_A = (0 , a-b+c , a+b-c)$, $J_B = (-a+b+c , 0 , a+b-c)$, $J_C = (-a+b+c , a-b+c , 0)$

Le point de Gergonne : $(AI_A) \cap (BI_B) \cap (CI_C)$

$$E = \left(\frac{1}{(-a+b+c)} , \frac{1}{(a-b+c)} , \frac{1}{(a+b-c)} \right) .$$

Le point de Nagel : $(AJ_A) \cap (BJ_B) \cap (CJ_C)$

$E' = (-a+b+c , a-b+c , a+b-c)$

Les points d'intersection des bissectrices intérieures avec les côtés :

$U_A = (0 , b , c)$, $U_B = (a , 0 , c)$, $U_C = (a , b , 0)$

Les points d'intersection des bissectrices extérieures avec les côtés :

$U'_A = (0 , -b , c)$, $U'_B = (a , 0 , -c)$, $U'_C = (-a , b , 0)$

Le point de Lemoine : point commun aux trois symédianes, où une symédiane est la symétrique d'une médiane par rapport à la bissectrice intérieure issue du même sommet. $L = (p_1 , p_2 , p_3)$

Le premier point de Brocard : point commun aux trois cercles suivants: cercle passant par A et tangent en B à (BC) , cercle passant par C et tangent en A à (AB) et cercle passant par B et tangent en C à (AC) :

$Q = (p_1 p_3 , p_1 p_2 , p_2 p_3)$

Le second point de Brocard : point commun aux trois cercles suivants: cercle passant par A et tangent en C à (BC) , cercle passant par B et tangent en A à (CA) et cercle passant par C et tangent en B à (AB) : $Q' = (p_1p_2 , p_2p_3 , p_3p_1)$
Sommets du premier triangle de Brocard : $B_1 = (BQ) \cap (CQ') = (p_1 , p_3 , p_2)$ $B_2 = (CQ) \cap (AQ') = (p_3 , p_2 , p_1)$ $B_3 = (AQ) \cap (BQ') = (p_2 , p_1 , p_3)$
Sommets du second triangle de Brocard : $C_1 = (CQ) \cap (BQ') = (q_1 , p_2 , p_3)$ $C_2 = (AQ) \cap (CQ') = (p_1 , q_2 , p_3)$ $C_3 = (BQ) \cap (AQ') = (p_1 , p_2 , q_3)$
Sommets des triangles extérieurs de Napoléon : triangles équilatéraux construits sur les côtés : $D_A = \left(-2\, p_1\sqrt{3} , 4\Delta + q_3\sqrt{3} , 4\Delta + q_2\sqrt{3}\right)$; $D_B = \left(4\Delta + q_3\sqrt{3} , -2\, p_2\sqrt{3} , 4\Delta + q_1\sqrt{3}\right)$; $D_C = \left(4\Delta + q_2\sqrt{3} , 4\Delta + q_1\sqrt{3}, -2\, p_3\sqrt{3}\right)$.
Point de Fermat (ou de Toricelli) : $(AD_A) \cap (BD_B) \cap (BD_C)$ $F = \left(1/\left[4\Delta + q_1\sqrt{3}\right] , 1/\left[4\Delta + q_2\sqrt{3}\right] , 1/\left[4\Delta + q_3\sqrt{3}\right]\right)$

4 - EXEMPLE :

Considérons le triangle ABC défini par $a = 21$, $b = 20$, $c = 13$. Alors :

$$M = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ d'où les coordonnées de quelques points remarquables dans le repère $\mathcal{E}$ à 0,005 près :

A(16 ; 12) B(21 ; 0) C(0 ; 0) G(12,33 ; 4)
H(16 ; 6,67) O(10,5 ; 2,67) N(13,25 ; 4,67)
I(14 ; 4,67) E(14,87 ; 5,25) E'(9 ; 2,67)
L(15,3 ; 5,24) Q(15,37 ; 2,81) Q'(13,32 ; 6,65)
F(14,78 ; 5,28).

5 - CONCLUSION :

Certains ne verront peut-être dans les calculs qui précèdent qu'un original exercice de géométrie. Cependant d'autres pourront, comme je l'ai pu, en apprécier l'utilité pratique. Ceux-ci pourront élaborer un petit programme d'ordinateur qui, construit grâce au formulaire, donne immédiatement les coordonnées des points remarquables du triangle ABC quand on entre a , b , c. A partir de ces coordonnées, ils pourront ainsi trouver la distance entre deux points, ce qui leur permettra d'évaluer facilement si une figure a été correctement exécutée.

Il existe, bien sûr, d'autres points remarquables que ceux considérés ici ([1], [2]) et on peut ainsi étendre le formulaire.

6 - REFERENCES :

[1] Y. et R.SORTAIS , *La géométrie du triangle : exercices résolus.* Hermann, Paris, 1987.
[2] M.COLLET et G.GRISO , *Le cercle d'Euler* , Vuibert, Paris, 1987.
[3] S.DUBUC , *Géométrie plane*, Presses Universitaires de France, Paris, 1971.