Courrier des lecteurs

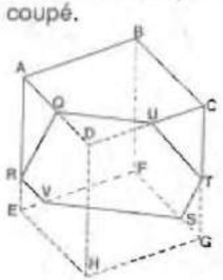
La Géométrie : dessin et/ou calcul ?

Bernard Parzysz
IREM PARIS VII

La lecture de l'intéressant article de Jacques VERDIER récemment paru dans notre Bulletin (n°370, p.496) et relatant une séance de travaux dirigés de géométrie dans l'espace en classe de Première F, m'a ramené à la question du statut du dessin en géométrie, ainsi qu'à celle des conceptions des enseignants à son endroit.

Cet article montre à l'évidence un fait constant dans l'enseignement, et qui ne me semble pas sans conséquences : il s'agit de l'importance donnée par les élèves au calcul (qu'il soit numérique ou algébrique) dans la résolution des tâches géométriques. Il ressort en effet de cette lecture que toutes les démarches de résolution décrites font intervenir l'outil-calcul, sous des formes d'ailleurs très variées (Thalès, Pythagore, trigonométrie, relations métriques dans le triangle, distance en analytique, etc). Et cependant il était en l'occurrence tout à fait possible d'obtenir une solution sans calculs ; l'article montre qu'un certain nombre d'élèves l'avaient potentiellement obtenue (une telle solution figure en *Annexe*). Comme cette omniprésence des calculs dans les solutions n'est certainement pas le fait du hasard, des questions apparaissent alors ; en particulier : *"Ce phénomène est-il dû à la nature même* *de la tâche ? Résulte-t-il d'une consigne explicite du maître (extérieure à l'énoncé) ou d'un contrat habituel dans l'enseignement de la géométrie ?"*

Pour vous permettre de suivre :
Connaissant le côté d'un cube (10 cm) et les mesures respectives de ER,QD et SG, soit 2, 5 et 3 cm, déterminer les dimensions de l'intersection (RQUTSV) et la tracer en vraie grandeur.
Si le temps le permet, construire une maquette du cube coupé.



La consigne demande de *"déterminer les dimensions de l'intersection"* du cube avec le plan, de *"la tracer en vraie grandeur"* et de *"construire une maquette du cube coupé"*. Il semble donc s'agir (le vocabulaire va dans ce sens) d'une tâche de nature technique, du type "coupe des pierres" par exemple. Or, justement, dans la pratique des compagnons charpentiers ou tailleurs de pierre (l'art du trait), le calcul n'intervient pas : l'outil essentiel est, outre le report de longueurs, la construction géométrique (à la règle et au compas). Si l'on se place maintenant du point de vue mathématique, le premier problème est de décider s'il s'agit de déterminer des *longueurs* ou des *distances*. Ce n'est pas ici une simple argutie, mais une question de fond : dans le cas d'une longueur, exhiber un segment ayant cette longueur suffit ; mais s'il s'agit d'une distance, il est nécessaire de fournir une mesure de ce segment, d 'où un recours obligé au numérique. Dans ce cas, il conviendra ensuite de définir ce qui sera accepté comme réponse : la valeur exacte sera-t-elle exigée, ou une valeur approchée (mesurée par exemple, sur un dessin en vraie grandeur) suffira-t-elle ? Tel sera en particulier le cas si la tâche est de type technique.

Dans le cas présent, la nature de la tâche n'impliquant pas nécessairement un recours aux calculs, le comportement des élèves laisse à penser que celui-ci fait partie du contrat, soit qu'il ait été explicitement demandé par l'enseignant pour l'occasion (mais on n'en trouve pas trace dans le texte), soit -et c'est plus vraisemblable- qu'il s'agisse d'un élément systématique (et implicite) dudit contrat. Pourquoi, alors, en est-il ainsi ?

Le problème de fond me semble être celui de la "rigueur" mathématique. Plus précisément : *une solution graphique est-elle aussi rigoureuse qu'une solution obtenue par le calcul ?* Lorsqu'il s'agit d'algèbre, par exemple dans le cas de la résolution d'une équation, la réponse est évidemment non, puisque la repré- sentation graphique la plusprécise de la parabole d'équation $y = x^2 - x - 1$ ne peut, à elle seule, fournir les solutions exactes de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. D'autre part, le Nombre possède déjà une aura particulière dans l'esprit populaire : il n'est que de voir le rôle d'argument sans réplique que font jouer aux "chiffres" les hommes politiques dans les débats qui les opposent. Au contraire, la construction géométrique est fortement connotée d'imprécision, essentiellement à cause de l'aspect matériel, donc imparfait, des "figures" (en fait : les dessins), et à l'emploi d'instruments de tracé (report, épaisseur des traits ...). Il est fort possible que de là provienne le discrédit dont souffre l'outil graphique en géométrie.

Pourtant, une construction géométrique *n'est pas* la réalisation d'un dessin, mais *c'est un algorithme* où interviennent des objets géométriques (droites, cercles, etc). La rigueur mathématique ne saurait donc résider dans une illusoire précision de tracé, mais elle est dans la conformité de cet algorithme avec les règles (axiomes, théorèmes) de la géométrie. (N.B.: le problème de la *précision* est, on le voit, tout autre que celui de la *rigueur*, et on peut aussi se poser légitimement la question de la plus ou moins grande précision de telle ou telle construction géométrique, compte tenu des procédés matériels qui entrent en jeu, de même que l'on peut se poser la question de savoir combien conserver de chiffres significatifs dans les calculs. Dans cette optique, le recours au calcul, ayant pour but de pallier les insuffisances des constructions matérielles, se justifie pleinement. Mais ce n'est pas ici le propos).

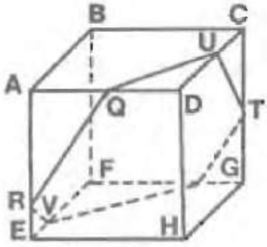
Références

VERDIER Jacques (1989) : *Un exemple de "situation problème" en géométrie dans l'espace*, in Bulletin APMEP n°370 (Sept.1989) pp.496-503.

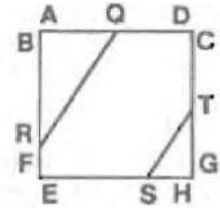
PARZYSZ Bernard (1989): *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée.Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse de diplôme de doctorat. Université Paris-7.

Puisque donc il ne s'agit pas d'un manque de rigueur, il n'y a aucune raison théorique de refuser les solutions purement graphiques aux problèmes tels que celui qui nous occupe ici. On pourrait y trouver une raison d'ordre didactique (si elle était au niveau conscient, mais est-ce souvent le cas ?) : la volonté, de la part de l'enseignant, de faire utiliser par les élèves des théorèmes relatifs aux mesures, ambition tout-à-fait légitime et qu'il n'est certes pas question de contester. Mais le contrat actuel semble à l'évidence très bien fonctionner de lui-même, à tel point que, lorsqu'on veut dans une classe laisser aux élèves la possibilité de fournir une solution purement graphique (je parle d'expérience), il est nécessaire de le leur préciser explicitement (PARZYSZ 1989, p.349). La situation actuelle aurait me semble-t-il tout intérêt à un rééquilibrage accordant un véritable statut mathématique à l'outil graphique en géométrie (dans le plan ou l'espace) : outre le fait que l'on n'a jamais trop de cordes à son arc, ceci aurait l'avantage de ne pas surpénaliser les élèves ayant des difficultés avec les outils algébriques et numériques, et de leur redonner leur chance.

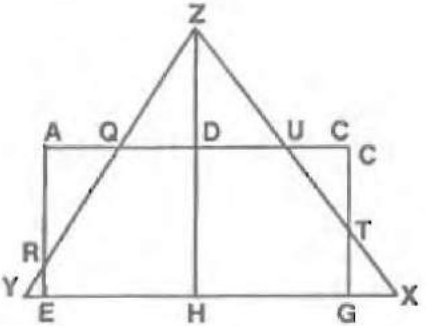
RÉSOLUTION GRAPHIQUE DU PROBLÈME



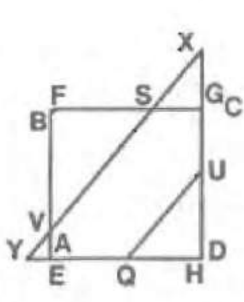
1 - Vue d'ensemble en perspective cavalière



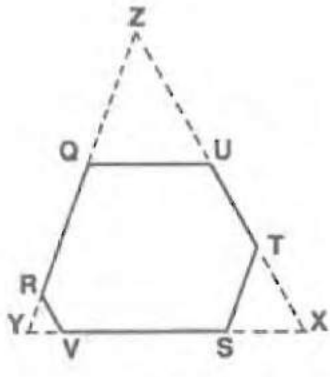
2 - Détermination de T : on projette (ADEH) sur (BCGF)



3 - Détermination de U : on développe selon (HD) N.B. : [YZ] et [XZ] sont en vraie grandeur



4 - Détermination de V : on projette (EFGH) sur (ABCD) N.B. : [XY] est en vraie grandeur



5 - La section en vraie grandeur (on utilise les N.B. des dessins 3 à 4)