Les Problèmes de L'A.P.M.E.P

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes" ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

M.Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 Limoges

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

ENONCES

ENONCÉ n°172 (Compétition PUTNAM)

Un projectile lancé du sol, dans une direction faisant un angle α avec le sol que l'on suppose plat et horizontal, se déplace sous l'action de la seule force de gravité puis tombe sur le sol. Pour que l'angle α l'arc de parabole parcouru a-t-il une longueur maximale ?

ENONCÉ n°173 (CONCOURS GÉNÉRAL 1989)

Déterminer le plus grand nombre réel k tel que, pour tout tétraèdre ABCD de volume V, le produit des aires des faces ABC, ABD et ACD soit supérieur ou égal à kV^2.

ENONCÉ n°174 (Charles NOTARI , Noë)

Trouver un réel a , aussi grand que possible, tel que :
$\cos x + \cos y \leq 1 + \cos xy$ pour tous les réels x et y vérifiant $x^2+y^2 \leq a^2$.

SOLUTIONS

ENONCÉ n°155 (Gustave CHOQUET, Antony)

On dispose d'une table ronde à quatre pieds, dont l'équilibre ne pose aucun problème sur un sol parfaitement plan. Peut-elle retrouver un tel équilibre dans une salle au plancher bosselé ?

SOLUTION de Jean LEFORT (Wintzenheim)

Soient A, B, C et D les quatre pieds de la table (les pieds sont supposés ponctuels). Plaçons la sur le sol que l'on assimile à une surface continue. Supposons que A, B, C touchent respectivement le sol en a, b, c et que D soit trop haut. Appelons (1) cette position.

Imaginons par la pensée que l'on bascule la table autour de (AB) de manière à ce que D touche le sol en d ; C arrive alors sous le sol. Appelons (2) cette position fictive et revenons à la position (1).

A partir de la position (1), effectuons un déplacement continu de la table de façon à amener A en b et B en c, tout en conservant A, B et C en contact avec le sol.

Je peux affirmer qu'au cours de ce déplacement D touchera le sol ce qui permettra, *en cette position intermédiaire, de résoudre le problème de la* "stabilité" *de la table*.. En effet, s'il n'en était pas ainsi, C arriverait à la fin du déplacement en d, ce qui à une permutation près des quatre pieds, conduit à la position (2) où D serait sous le sol. D serait alors passé d'au-dessus à au-dessous du sol sans le traverser, ce qui est contraire à l'hypothèse de continuité du sol.

Remarques physiques :

1) La "stabilité" de la table est toute mathématique. Rien ne prouve qu'en cette position la verticale abaissée du centre de gravité de la table passe à l'intérieur du carré ABCD.
2) L'hypothèse de continuité semble assez naturelle, mais rien n'empêche le sol de présenter de telles variations d'altitude qu'aucun pied de la table ne puisse toucher le sol.
3) De plus, le sol peut présenter des à-pic ou des surplombs qui, malgré l'existence d'une solution théorique, entraînerait une impossibilité pratique puisque cela voudrait dire que si les quatre pieds sont bien en contact avec le sol, ils ne le sont qu'après l'avoir traversé plusieurs fois !
4) Enfin, chaque pied a une certaine largeur, ce qui empêche une stabilité physique si le sol présente des variations trop brutales.

Autres solutions : Gérald GOUBY (Figeac), François LO JACOMO (Paris), Daniel PECKER (Paris).

ENONCÉ n°156 (Gabriel FRAÏSSE, Ferrals les Corbières).

Peut-on trouver dans un réseau plan à mailles carrées deux nœuds M et N tels que 2MN = MA + MB où A et B sont deux nœuds opposés d'une même maille pour lesquels MA ≠ MB ?

SOLUTION de Bernard HERON (Orsay).

On peut supposer sans perte de généralité que le réseau considéré est celui des points à coordonnées entières (i.e.$\mathbb{Z}^2$) du plan euclidien, et que A = (0,1), B = (1,0).

Les points A, B, M, N étant des nœuds du réseau, les nombres MA^2, MB^2, MN^2, AN^2 sont entiers (somme de deux carrés).

Si M = A, l'égalité MA + MB = 2MN se réduit à AB = 2AN ou encore à $AN^2 = 1/2$ ce qui est impossible. Même chose si M = B. Donc, si l'égalité MA + MB = 2MN a lieu, elle s'écrit $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ avec $a = MA^2$, $b = MB^2$, $c = 4MN^2$, tous trois entiers non nuls. Or

Lemme 1 . Si m est entier et si $\sqrt{m}$ est rationnel, alors $\sqrt{m}$ est entier.
Preuve . Si $m \neq 0$ écrivons $\sqrt{m} = \frac{p}{q}$ avec PGCD$(p,q) = 1$; alors $mq^2 = p^2$ et q divise p^2 ; donc $q = 1$ et $m = p^2$.

Lemme 2. Si des entiers a, b, c non nuls vérifient $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$, il existe des entiers α, β, δ non nuls tels que PGCD$(\alpha, \beta) = 1$ et $a = \delta\alpha^2$, $b = \delta\beta^2$, $c = \delta(\alpha + \beta)^2$.

Preuve.: En élevant au carré il vient $a + b + 2\sqrt{ab} = c$ d'où $\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$ (lemme 1). Tout diviseur δ commun à a et b divise aussi $\sqrt{ab}$ donc il divise c . Pour δ = PGCD(a,b) on pose $a = \delta a_1$, $b = \delta b_1$, $c = \delta c_1$. On a PGCD$(a_1,b_1) = 1$ et $\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$. Puisque a_1b_1 est un carré et que a_1 et $b_1$sont premiers entre eux, tous deux sont des carrés : $a_1 = \alpha^2$, $b_1 = \beta^2$ avec PGCD$(\alpha, \beta) = 1$.

Enfin $\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1}=\sqrt{c_1}$ donne $c_1=(\alpha+\beta)^2$

Application :: au cas $a = MA^2$, $b = MB^2$, $c = 4MN^2$ (tous $\neq 0$).

Le lemme 2 montre que

PGCD(a,b) = PGCD(b,c) = PGCD(c,a) = δ = PGCD(a,b,c). Or, si les coordonnées (x,y) du nœud M sont de parités différentes, l'un des nombres $a = x^2+(y-1)^2$ et $b=(x-1)^2+y^2$ est somme de deux carrés pairs, donc divisible par 4 comme c , et l'autre est somme de deux carrés impairs, donc divisible par 2 seulement. Ceci étant exclu, x et y sont par conséquent de même parité, a et b sont impairs et donc α,β,δ aussi.

L'inégalité triangulaire donne ;$\sqrt{\delta}|\alpha-\beta| = |MA - MB| \leq AB = \sqrt{2}$; comme $1 \leq \sqrt{\delta}$, il en découle $|\alpha-\beta| \leq \sqrt{2}$ et donc $\alpha = \beta$ puisque $(\alpha - \beta)$ est pair. Mais alors MA = MB : *il n'existe pas de nœuds M et N* du réseau qui vérifient MA + MB = 2MN avec MA $\neq$ MB.

Autres solutions : François LO JACOMO (Paris), MARCOURT (Ste Savine), Charles NOTARI (Noë), et l'auteur.

Complément dû à Gabriel FRAÏSSE

Proposition : Dans un réseau plan à mailles carrées, si O et A sont deux nœuds et B et C deux nœuds opposés d'une même maille tels que OB < OC, alors:

(1) $\qquad 2OA^2 \geq OB^2 + OC^2 \Rightarrow 2OA > OB + OC$

(2) $\qquad 2OA^2 < OB^2 + OC^2 \Rightarrow 2OA < OB + OC.$

(Il en résulte que l'égalité 2OA = OB + OC est irréalisable)

Démonstration :

◊ Si $OA \le OB$ alors $OA \le OB$; $OA^2 \le OB^2$

$OA < OC$; $OA^2 < OC^2$

et par addition $2OA < OB + OC$; $2OA^2 < OB^2 + OC^2$.

◊ Si $OC \le OA$ alors $OC \le OA$; $OC^2 \le OA^2$

$OB < OA$; $OB^2 < OA^2$

et par addition $OB + OC < 2OA$; $OB^2 + OC^2 < 2OA^2$.

On suppose donc : $OB < OA < OC$.

L'implication (1) est établie par la chaîne suivante :

$$2OA^2 \ge OB^2 + OC^2$$
$$\Leftrightarrow \quad OA^2 - OB^2 \ge OC^2 - OA^2$$
$$\Leftrightarrow \quad (OA - OB)(OA + OB) \ge (OC - OA)(OC + OA)$$
$$\Leftrightarrow \quad OA - OB \ge (OC - OA)\frac{OC + OA}{OB + OA}$$
$$\Rightarrow \quad OA - OB > OC - OA \quad (\text{car } \frac{OC + OA}{OB + OA} > 1)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2OA > OB + OC .$$

L'implication (2) est plus subtile :

On choisit pour unité de distance la distance entre deux nœuds voisins. On rapporte le plan à un repère orthonormé d'origine O tel que les nœuds soient les points de coordonnées entières.

Alors OA^2, OB^2, OC^2 sont des entiers. $OB^2 + OC^2$ *est un entier pair*. En effet : si B a pour couple de coordonnées entières (x,y), il existe deux entiers u et v de $\{-1 ; 1\}$ tels que le couple des coordonnées de C soit $(x + u , y + v)$. La somme $OB^2 + OC^2$ s'écrit $2(x^2 + y^2 + ux + vy + 1)$ car $u^2 = v^2 = 1$.

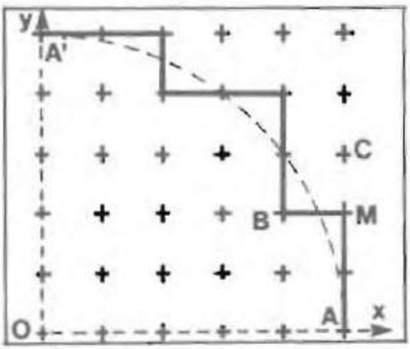
Il est maintenant possible d'établir l'implication(2) par la chaîne suivante :

$$2OA^2 < OB^2 + OC^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2OA^2 \le OB^2 + OC^2 - 2$$ (2 est la plus petite différence possible entre deux entiers pairs distincts)
$$\Leftrightarrow \quad OA^2 - OB^2 + OA^2 - OC^2 \le -2$$
$$\Leftrightarrow \quad (OA - OB)(OA + OB) + (OA - OC)(OA + OC) \le -2$$
$$\Leftrightarrow \quad (OA - OB)(OA + OB) + (OA - OC)(OA + OB + OC - OB) \le -2$$
$$\Leftrightarrow \quad (OA - OB + OA - OC)(OA + OB) + (OA - OC)(OC - OB) \le -2$$
$$\Leftrightarrow \quad (2OA - OB - OC)(OA + OB) \le (OC - OB)(OC - OA) - 2$$
$$\Rightarrow \quad (2OA - OB - OC)(OA + OB) < \sqrt{2}.\sqrt{2} - 2$$

(car $0 < OC - OA < OC - OB < BC = \sqrt{2}$)

$$\Leftrightarrow \quad (2AO - OB - OC)(OA + OB) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2OA - OB - OC < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2OA < OB + OC.$$

Application :



A l'aide de ces implications, on peut justifier un algorithme pour tracer un "*cercle discret*": il s'agit, sur le réseau, d'aller de $A(O,R)$ à $A'(O,R)$ en s'éloignant le moins possible du cercle de centre O et de rayon OA (R entier strictement positif).

On peut procéder ainsi (les commentaires figurent entre accolades):

Début

$X \leftarrow R$ {abscisse du point courant M, M initialisé à A}

$Y \leftarrow O$ {ordonnée du point courant M}

$D \leftarrow O$ $\{D = OM^2 - OA^2\}$

Répéter {à partir de M(X,Y), il faut choisir entre entre B(X-1,Y) et C(X,Y+1)}

$D \leftarrow D - X + Y + 1$ $\{D = (1/2)(OB^2 + OC^2 - 2OA^2)\}$

Si $D \leq 0$ Alors {OB + OC - 2OA < 0 ; il faut choisir C pour nouvel M}

$D \leftarrow D + X + Y$ $\{D = OC^2 - OA^2\}$

$Y \leftarrow Y + 1$ $\{M = C\}$

Sinon {OB + OC - 2OA > 0 ; il faut choisir B pour nouvel M}

$D \leftarrow D - X - Y$ $\{D = OB^2 - OA^2\}$

$X \leftarrow X - 1$ $\{M = B\}$

Fin Si

Jusqu'à $X = 0$

Fin

ENONCÉ N°157 (Eugène EHRHART, Strasbourg)

Quel est le rayon du plus petit cercle passant par exactement cinq nœuds d'un quadrillage à mailles carrées de côté 1 ?

SOLUTION de Jacques FULGENCE (Dijon).

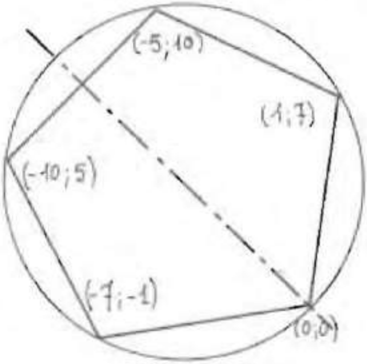
O est l'un des points cocycliques, origine du repère (axes parallèles au quadrillage). On fait varier deux points A et B dans les quarts de plan haut-droite et haut-gauche (A décrit des diagonales $x + y = s$ par valeurs croissantes de s, et pour A fixé B décrit des diagonales $y - x = d$ par valeurs croissantes de d); pour A et B fixés, on calcule le centre C du cercle circonscrit à OAB et on compte le nombre de nœuds (appartenant à un carré contenant le cercle) dont la distance à C est "quasi-égale" au rayon du cercle (différence < 0,001). Pour les commentaires sur les solutions, voir à la fin.

```
uses crt;
const max=10; Rmax=20;
var p,s,xa,ya,d,xb,yb,n,x,y : integer;
    denom,numx,numy,xc,yc,r,haut,bas,gauche,droit,rr,e: real;
    T: array[1..2,1..6] of integer;
PROCEDURE compte_nœuds ;
begin
    haut:=yc+r; bas:=yc-r; gauche:=xc-r; droit:=xc+r;
    for y:=trunc(bas-1) to trunc(haut+1) do if n<6 then       {abandon si}
    begin                                                      {plus de 5  }
        for x:=trunc(gauche-1) to trunc(droit+1)  do if n<6 then  {nœuds}
        begin
            rr:=sqrt((x-xc)*(x-xc)+(y-yc)*(y-yc));  e:=abs(rr-r);
            if e<0.001 then begin n:=n+1; T[1,n]:=x  T[2,n]:=y; end;
        end;
    end;
end;
PROCEDURE victoire ;
var w,z: integer;
begin
    writeln; write('VICTOIRE'          R =',r:10:6,'.     ');
    writeln('Centre : (',xc:6:3,',',yc:6:3,').');
    writeln('************************************************************');
    write('Les 5 noeuds sont : (',T[1,1],',',T[2,1],'); (');
    write(T[1,2],',',T[2,2],'); (',T[1,3],',',T[2,3],'); (');
    writeln(T[1,4],',',T[2,4],'); (',T[1,5],',',T[2,5],').');
    writeln('************************************************************');
    writeln;
    for w:=1 to 30 do                    {Temporisation (Keypressed }
        for z:=1 to 30000 do z:=z+1;     { ne marche pas bien       }
end;
```

```
PROCEDURE explore cercle circonscrit OAB ;
begin
   xc:=numx/denom; yc:=numy/denom; r:=sqrt(xc*xc+yc*yc);
   n:=0            {détermination du centre et du rayon}
   if r<Rmax then compte_noeuds;
   write('d=',d,' ; B=(',xb,',',yb,') : ');
   if(n>0)and(n<6) then write(n,' noeuds sur le cercle.'); {n est le }
   if n=6 then write('plus de cinq noeuds. ');              {compteur}
   if n=0 then write('le rayon dépasse ',Rmax,' . ');        {de noeuds}
   writeln('(R voisin de ',trunc(r),')');
end;
BEGIN
   p:=0;                              {p : compteur de solutions}
   for s:=1 to max do
      begin
         for xa:=1 to s do
            begin
               ya:=s-xa; writeln;
               writeln('          Pour 'l'instant ',p,' solutions(s)');
               writeln('s = ',s,' ; A = (',xa,',',ya,')');
               writeln('--------------------');writeln;
               for d:=s to max do
                  begin
                     for xb:=-1 downto -d do
                        begin
                           yb:=xb+d;
                           denom:=2*(xb*ya-xa*yb);
                           numx:=ya*(xb*xb+yb*yb)-
                                             yb*(xa*xa+ya*ya);
                           numy:=xa*xb*(xa-xb*xb*ya*ya-xa*yb*yb;
                           if denom<>0 then explore_ cercle_
                                             circonscrit_OAB;
                           if n=5 then begin victoire; p:=p+1; end;
                        end;
                  end;
            end;
      end;
END.
```

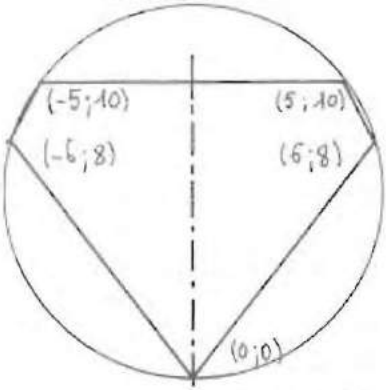
RESULTATS : si on ne cherche que des cercles de rayon inférieur à 20 (constante Rmax=20), et si on limite s et d à des valeur inférieures ou égales à 10 (constante max = 10), on trouve quatre "solutions", qui s'avèrent être effectivement solutions. Si on pousse s et d jusqu'à 15, on trouve en tout 13 solutions. *Le plus petit rayon trouvé vaut R = 5.892557 et c'est effectivement la solution minimale* ; par contre, il n'est pas certain - et même à peu près exclu - que les 13 solutions obtenues correspondent aux 13 plus petits rayons : il n'y a en effet aucun lien entre la taille du triangle OAB et celle de son cercle circonscrit.

A remarquer que, parmi les pentagones trouvés, certains possèdent un axe de symétrie - le plus petit rayon pour lequel il n'y ait pas d'axe de symétrie semblant être R = 9.105 392.

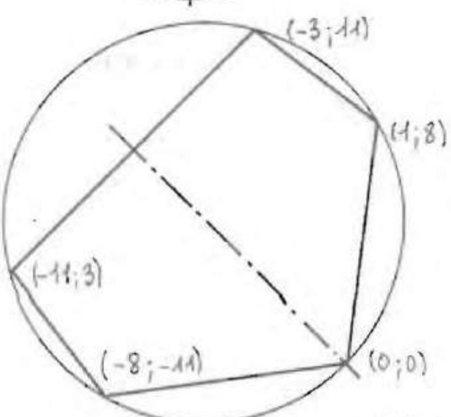


$R \cong 5{,}892557$
(rayon minimum)

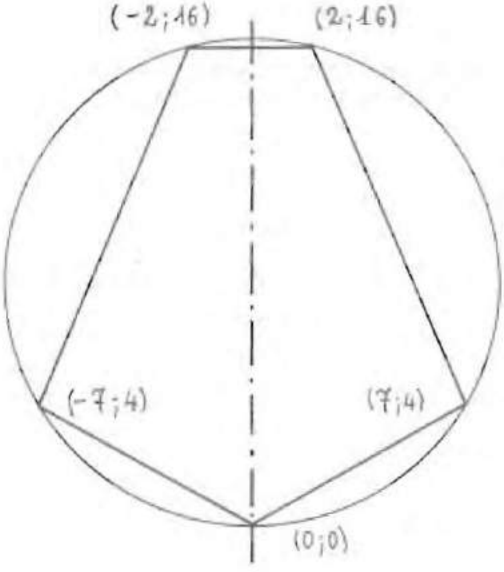
$(R = \frac{\sqrt{1250}}{6})$



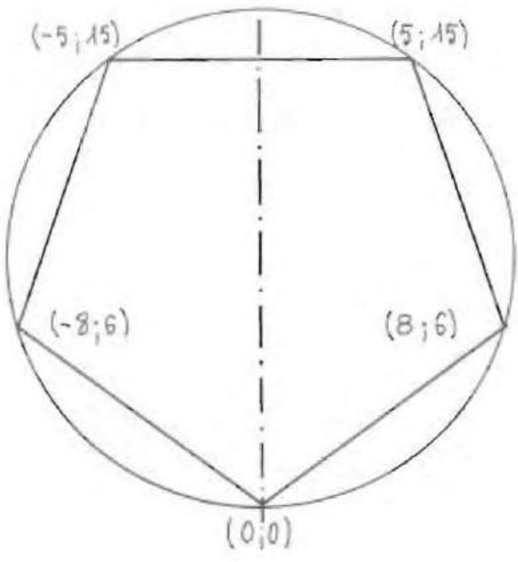
R = 6,25



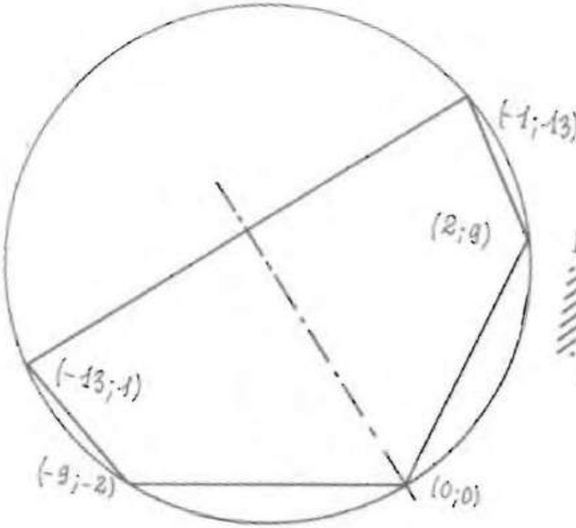
R = 6,565992



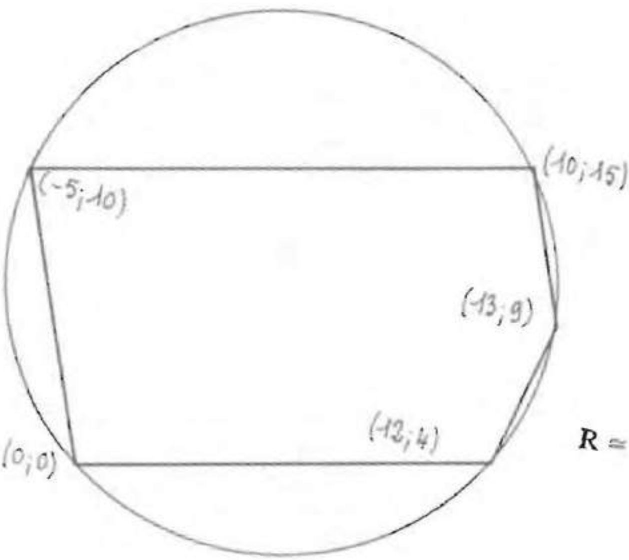
R = 8,125



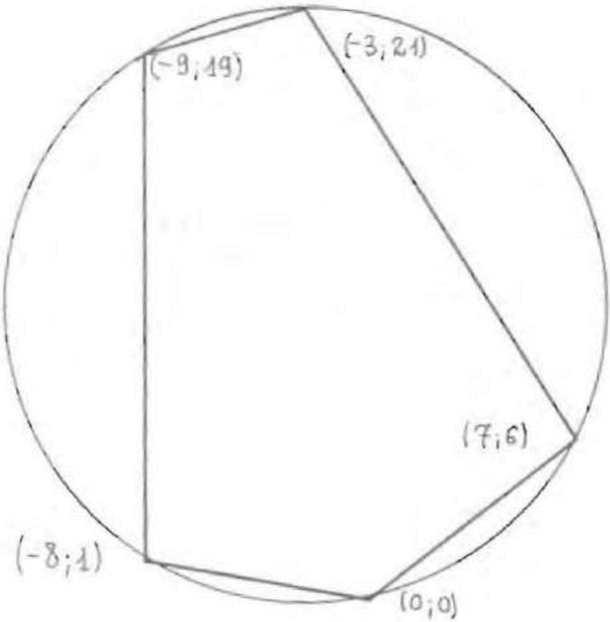
R = 8,333333



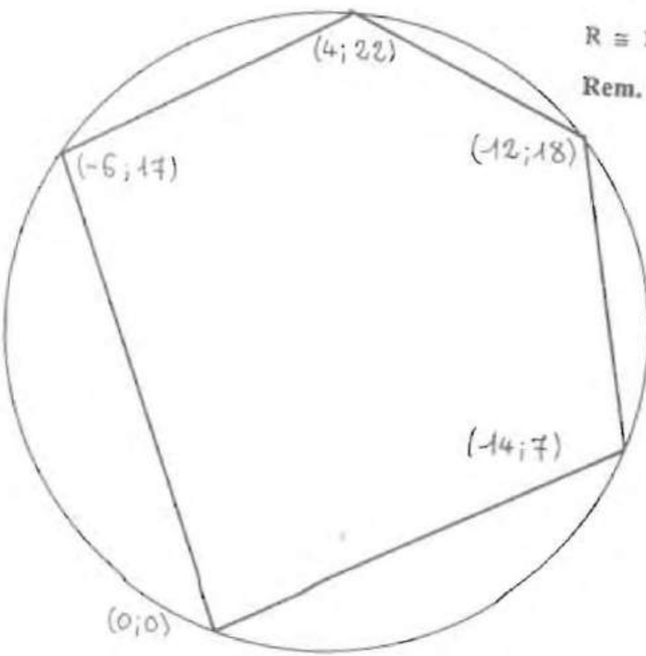
R = 9,105392
(plus petite solution trouvée ne possédant pas d'axe de symétrie)
Rem. : 2 côtés parallèles.



R = 8,586297



R ≅ 10,684236



R ≅ 11,267348

Rem. : 2 côtés parallèles.

Autres solutions

Eugène EHRHART, grâce à un programme de François PLUVINAGE, qui ramène la recherche à l'examen de 1 056 cercles, obtient le même rayon minimum $R = \frac{25}{3\sqrt{2}}$. C'est celui du cercle d'équation :

$3(X^2 + Y^2) - 25(X + Y) = 0$. François LO JACOMO (Paris).
Solution partielle : Charles NOTARI (Noë).

Remarque 1 :

On peut lire dans *Joyaux Mathématiques* de ROSS HONSBERGER, volume 1, pages 126 à 129 (CEDIC, 1979), la démonstration du théorème de SCHINZEL : pour $n = 2k + 1$, le cercle de centre $(\frac{1}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{5^k}{3}$ passe par exactement n points du réseau; ainsi que sa généralisation à l'espace pages 133,134 (Théorème de KULIKOWSKI).

Remarque 2 :

Le programme de Jacques FULGENCE lui a permis d'obtenir un cercle passant par exactement 7 nœuds : (0,0) ; (11,2) ; (30,40) ; (25;50) ; (- 11,2) ; (- 30,40) ; (- 25,50). Il est de rayon $R = \frac{125}{4} = 31{,}25$.

De son côté, Eugène EHRHART a obtenu le cercle d'équation :
$5(X^2 + Y^2) - 1394X = 0$ qui passe par exactement 9 points entiers : (0,0) ; (5 , ± 37) ; (170,±136) ; (205,± 123) ; (245,± 91) et il conjecture que le cercle minimum passant par juste neuf nœuds est celui d'équation :

$$3(X^2 + Y^2) - 65(X + Y) = 0 \qquad \text{(à un déplacement près).}$$

COURRIERS DE LECTEURS

I) *Solutions tardives* : n° 146 : une réponse fausse.
n° 153 : Claude GOUANELLE (Bordeaux), Jean LEMAIRE (Lille).

II) Robert FERREOL propose le nom de projection *stéréocylindrique* pour désigner ce que M.BAUVAL appelle projection de MERCATOR (*Bulletin* n°369, p.434).

III) Richard ANDRÉ-JEANNIN (Sfax, Tunisie) généralise l'énoncé n° 153 aux applications f de N dans N, vérifiant pour tout n : $f^{(p)}(n) = n + \alpha$, en montrant qu'alors p divise α.